# Fizyka budowli – notatki do wykładów

# Krzysztof Wilmański Instytut Budownictwa, Uniwersytet Zielonogórski http://www.mech-wilmanski.de

December 4, 2009

# 1 Wstęp

Przedmiotem fizyki budowli jest opis fizyczny następujących procesów w konstrukcjach budowlanych:

C: wymiana ciepła między komponentami budynku i budynkiem a środowiskiem zewnętrznym,

W: transport wilgoci w komponentach i przestrzeniach budowlanych,

A: akustyka budynków, ochrona przed hałasem,

P: ochrona przeciwpożarowa,

O: oświetlenie budynków,

**M:** zmiana własności materiałów budowlanych (np. degradacja, korozja) na skutek oddziaływania z atmosferą, zwłaszcza agresywną, na skutek starzenia się materiałów, itp.

Wynikiem tego opisu są zalecenia projektowe, częściowo stanowiące przedmiot norm budowlanych, a częściowo stanowiące nienormowane wskazówki projektowe. Należy zwrócić uwagę, że w ostatnich latach następuje istotna nowelizacja norm na skutek ujednolicenia norm polskich i unijnych. Przykładem są nowe normy, dotyczące wymiany ciepła: PN-EN ISO 6946:1999: Komponenty budowlane i elementy budynku. Opór cieplny i współczynnik przenikania ciepła. Metoda obliczania (opowiednik normy europejskiej EN ISO 6946: 1996 i zastępująca PN-91/B-02020), PN-EN ISO 7345:1998: Izolacja cieplna. Wielkości fizyczne i definicje (odpowiednik normy europejskiej ISO 7345:1985).

W tych notatkach skoncentrujemy się na pierwszych czterech grupach zagadnień.

Notatki rozpoczyna Rozdział dotyczący podstaw termostatyki. Wprowadza on podstawowe pojęcia termodynamiczne i daje podstawę zarówno do obliczeń wymiany ciepła, jak i do problemów wilgotności.

W Rozdziałach trzecim, czwartym i piątym omawiamy teoretyczne podstawy wymiany ciepła, problemy przewodnictwa cieplnego, konwekcji i promieniowania. Część tą zamykają przykłady projektowania komponentów budynków w oparciu o PN-EN ISO 6946.

Rozdział szósty jest poświęcony opisowi teoretycznemu problemów wilgotności i wskazaniom praktycznym przy projektowaniu budynków w oparciu o normy: PN-83/B-03430: Wentylacja w budynkach mieszkalnych zamieszkania zbiorowego i użyteczności publicznej. Wymagania, oraz PN-83/B-03430/Az3:2000, j.w. (Zmiana Az3).

Rozdział siódmy składa się z dwóch części. Część pierwsza zawiera podstawy teoretyczne akustyki. Oprócz pojęcia fal akustycznych omawiane są takie ich własności, jak prędkość propagacji, tłumienie, impedancja, rozpraszanie, itd. Część druga stanowi przeniesienie tych pojęć teoretycznych na grunt projektowania budowlanego.

Na zakończenie przedstawiamy kilka zagadnień związanych z pożarnictwem. W pierwszej części rozdziału omawiana jest teoria reakcji chemicznych, konieczna do określenia szybkości spalania i innych własności procesów utleniania w trakcie pożaru. Część druga stanowi szkic kilku problemów występujących w ochronie pożarowej.

Pozostałe dwie grupy tematyczne: O i M nie wchodzą w zakres tego skryptu.

# 2 Termostatyka

## 2.1 Wprowadzenie

Przedmiotem termodynamiki jest makroskopowy opis procesów nieodwracalnych. Rozwój termodynamiki rozpoczął się w XIX wieku od prac Carnota, Helmholtza, Mayera, Clausiusa, Duhema, Gibbsa i wielu innych. Do połowy XX wieku rozważano prawie wyłącznie procesy w układach, które można było przedstawić w postaci skończonej sumy układów jednorodnych i ignorowano całkowicie rozwój procesów termodynamicznych w czasie. Termodynamika jako teoria pola, a więc teoria procesów niejednorodnych w przestrzeni i ewoluujących w czasie powstała dopiero w latach 60-tych XX wieku mimo, że pewne jej elementy istniały już w XIX-wiecznych pracach Calusiusa, Duhema czy Boltzmanna. Dla wielu celów praktycznych takich, jak wolne procesy chemiczne, teoria parowania i skraplania, itp. wystarczające jest klasyczne podejście do termodynamiki, w której nie pojawia się czas. Procesy są wtedy rozumiane jako przejścia od jednego stanu równowagi termodynamicznej do innego bez opisu sposobu przejścia. Ten rodzaj uproszczonej termodynamiki nazywamy termostatyką. Podstawowe pojęcia termostatyki będą przedstawione w tym Rozdziale notatek.

Opis rozpoczniemy od układów jednoskładnikowych, które w przypadku procesów jednorodnych i quasistatycznych (bardzo powolnych) są charakteryzowane przez ich objętość V i energię (potencjalną, gdyż w procesach quasistatycznych energia kinetyczna jest pomijalna) E. Powiedzmy, że w objętości V znajduje się n moli substancji o masie molekularnej M. Wtedy można wprowadzić następujące pojęcia, charakterystyczne dla polowej teorii, ale, w odróżnieniu od prawdziwej termodynamiki, niezależne od punktu przestrzeni (jednorodność) i od czasu

```
\begin{array}{ll} m=nM=& \text{const} & -\text{ całkowita masa układu,} \\ \rho=m/V & -\text{ gęstość masy (stała w przestrzeni!),} \\ v=1/\rho & -\text{ objętość właściwa (stała w przestrzeni!),} \\ \varepsilon=E/m & -\text{ gęstość energii na jednostkę masy (stała w przestrzeni!).} \end{array}
```

Dowolny stan równowagi układu jednoskładnikowego jest opisany przez parę $(\varepsilon, \rho)$  lub przez  $(\varepsilon, v)$  lub wreszcie równoważnie przez (E, V). Stan ten może ulec zmianie, na

przykład przez wykonanie na układzie pracy (np. ruch tłoka w cylindrze komprymujący gaz). Teoretycznie wszystkie stany, które pojawiają się przy takich zmianach są stanami równowagi osiąganymi przez układ po nieskończenie długim procesie relaksacji. Jeśli jednak czasy relaksacji są dostatecznie krótkie, to proces quasistatyczny jest dobrym przybliżeniem rzeczywistości.

Dla układów wieloskładnikowych (mieszanin), których składnikami są tzw. ciecze idealne, liczba moli n charakteryzuje wkład składnika do mieszaniny. Ilość tych nowych zmiennych niezależnych jest taka, jak ilość składników. Termostatykę takich układów przedstawimy w drugiej części tego Rozdziału.

### 2.2 Termostatyka układów jednoskładnikowych

Podstawą opisu procesów w termostatyce jest zasada zachowania energii, która w termodynamice jest nazywana pierwszą zasadą termodynamiki. W prostym przypadku cieczy idealnej i procesów czysto mechanicznych zasada to wiąże zmiany energii E ze zmianami objętości V. Dla małych (infinitezymalnych) zmian objętości ma ona postać

$$dE + pdV = 0$$
, gdzie  $p = p(E, V)$ , (1)

i, oczywiście, p jest interpretowane jako ciśnienie (jednorodne!) i jest ono zadane dla każdego stanu przez funkcję p(E,V). Jest to tzw. związek konstytutywny, definiujący rodzaj materiału (cieczy w rozpatrywanym tu przypadku). Układ, który spełnia zasadę zachowania w powyższej postaci jest nazywany izolowanym przez ścianki adiabatyczne. Jeśli natomiast układ może znienić energię przy stałej masie m i stałej objętości V mówimy, że jest w ściankach diatermicznych. Wtedy zasadę zachowania energii (1) trzeba uzupełnić, gdyż jednocześnie  $dE \neq 0$  i dV = 0. W ogólnym przypadku takich układów piszemy więc pierwszą zasadę termodynamiki w postaci

$$dE = \dot{W} + \dot{Q}, \quad \dot{W} = -pdV, \tag{2}$$

gdzie kropka nad literą oznacza, że wielkość jest infinitezymalna (tzw. 1-forma różniczkowa), ale, w przeciwieństwie do zmian energii dE, niekoniecznie jest ona różniczką zupełną.  $\dot{W}$  nazywamy mocq mechaniczną, a  $\dot{Q}$  - wymianą  $ciepła^1$ , związaną ze zmianą stanu  $(E,V) \rightarrow (E+dE,V+dV)$ . Prosta postać mocy mechanicznej jest związana z wyborem

$$\dot{Q} = \left(\int_{B} \rho r dV - \oint_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS\right) dt,$$

gdzie B jest obszarem zajętym przez ośrodek,  $\rho$  jest gęstością masy (tzn.  $\rho dV$  jest infinitezymalnym elementem masy), r oznacza gęstość promieniowania energii, a  $\mathbf{q}$  jest wektorem strumienia ciepła.  $\mathbf{n}$  jest wektorem jednostkowym, prostopadłym do powierzchni $\partial B$ . Znak minus w całce powierzchniowej jest powodem odmiennego znaku w normowej definicji wymiany ciepła. Powrócimy do tej sprawy w rozdziale 3.2.

 $<sup>^1</sup>$ Należy zwrócić uwagę, że  $\dot{Q}$ , występujące w przedstawianym szkicu termostatyki ma inną interpretację od wymiany ciepła, która pojawia się w termodynamice ośrodków niejednorodnych i w normie PN-EN ISO 6946:1999. Po pierwsze, w przedstawianej termostatyce nie pojawia się czas. W związku z tym porównywalne z  $\dot{Q}$  jest ciepło w termodynamice ośrodków niejednorodnych pomnożone przez infinitezymalny przyrost czasu dt. Po drugie, w normie zaleca się odwrotny znak dla ciepła  $\dot{Q}.$  Jest to związane ze znakiem pojawiającym się w klasycznej postaci zasady zachowania energii dla ośrodków niejednorodnych

prostego układu (ciecz idealna). Dla ciał stałych, na przykład, trzeba zmodyfikować definicję stanu układu uwzględniając całą deformację, również zmiany postaciowe, jak również definicję mocy. Aby zachować prostotę prezentacji nie robimy tego w tych notatkach.

Rozważmy teraz dwa układy A i B w ściankach adiabatycznych, których stany są dane przez  $(E_A, V_A)$  i  $(E_B, V_B)$ . Odpowiednie ciśnienia są  $p_A = p(E_A, V_A)$ ,  $p_B = p(E_B, V_B)$ . Nie zmieniając objętości układów ani adiabatycznoci względem świata zewnętrznego doprowadzamy oba układy do kontaktu przez ściankę diatermiczną. Między układami nastąpi wymiana energii. Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki mamy

$$dE_A = \dot{Q}_A, \quad dE_B = \dot{Q}_B. \tag{3}$$

Robimy teraz założenie, które jest również podstawowe dla teorii polowych (porównaj dalsze rozważania dla przewodnictwa cieplnego), że energia jest wielkością addytywnq, tzn. że energia całkowita obu układów jest sumą energii obu układów składowych. Z pierwszej zasady wynika wtedy ( $\dot{W}_A = \dot{W}_B = 0$ )

$$dE = dE_A + dE_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{Q}_A + \dot{Q}_B = 0, \tag{4}$$

z uwagi na izolację adiabatyczną całego układu.

Założenie o addytywności energii oznacza, że między składowymi układami nie ma oddziaływań dalekozasięgowych, oraz że na ściance izotermicznej między układami nie koncentruje się energia. Takie ścianki nazywamy idealnymi. Ich istnienie jest konieczne do wprowadzenia pojęcia temperatury absolutnej i do wprowadzenia termicznych warunków brzegowych dla równania przewodnictwa cieplnego.

Na skutek wymiany ciepła oba układy osiągają nowe stany równowagi  $(E'_A, V_A)$ ,  $(E'_B, V_B)$ , gdy ustaje między nimi wymiana ciepła. Układy znajdują się wtedy w nowym stanie równowagi termicznej. Ponieważ całkowita energia nie ulega zmianie, tylko jedna z wielkości  $E'_A, E'_B$  jest niezależna. A więc istnieje funkcja  $\theta_{AB}$ , która określa warunek równowagi termicznej dwóch układów

$$\theta_{AB}\left(E_{A}^{\prime},V_{A}\right) = \theta_{AB}\left(E_{B}^{\prime},V_{B}\right). \tag{5}$$

Własności tej funkcji są określone przez tzw. zerowe prawo termodynamiki. Nakłada ono warunek tranzytywności stanu równowagi: Jeśli wśród trzech układów A.B.C dwie pary, na przykład A,B i A,C, są w równowadze termicznej, to również B,C są w takiej równowadze. Możemy to zapisać następująco

$$\theta_{AB}(E_A, V_A) = \theta_{AB}(E_B, V_B) \quad i \quad \theta_{AC}(E_A, V_A) = \theta_{AC}(E_C, V_C) \quad \Rightarrow \quad (6)$$

$$\Rightarrow \quad \theta_{BC}(E_B, V_B) = \theta_{BC}(E_C, V_C).$$

Oznacza to, że istnieje funkcja  $\theta\left(E,V\right)$ , która określa istnienie lub też brak termicznej równowagi między dowolnymi dwoma układami rozważanej tu klasy znajdujących się w kontakcie przez idealną ściankę diatermiczną. Funkcja ta jest nazywana temperaturą empiryczną.

W związku z tym, jeśli funkcja  $\theta(E, V)$  jest odwracalna względem pierwszego argumentu, tzn. istnieje funkcja odwrotna  $E(\theta, V)$  dla każdego V to stan układu może być opisany parą  $(\theta, V)$ .

Przejdziemy teraz do sformułowania drugiej zasady termodynamiki w procesach quasistatycznych. Jeśli w pewnym procesie  $\dot{Q}=0$  to mówimy, że proces jest adiabatyczny. Wybierzmy dowolny stan  $(\theta,V)$  i rozważmy dowolny inny stan w jego otoczeniu. Ten stan może być ze stanu  $(\theta,V)$  osiągalny poprzez proces adiabatyczny (czysto mechaniczny) lub też nie. Wydaje się intuicyjnie oczywiste, że w dowolnym otoczeniu stanu  $(\theta,V)$  znajdują się zawsze stany, których na drodze adiabatycznej osiągnąć się nie da – potrzebna jest wymiana ciepła. Takie założenie intuicyjne zostało zrobione już w 1824 r. przez odkrywcę drugiej zasady termodynamiki, S. Carnota, w jego analizie procesów cyklicznych i obliczeniach sprawności maszyn cieplnych. W postaci formalnej zostało ono sformułowane w 1909 r. przez matematyka greckiego Constanitna Carathéodory'ego: w każdym otoczeniu dowolnego stanu istnieją stany nieosiągalne na drodze adiabatycznej. Oznacza to dla naszych prostych systemów, że w procesach łączących takie dwa stany  $dE - \dot{W} \neq 0$ . Carathéodory udowodnił, że przy jego założeniu 1-forma  $dE - \dot{W}$  jest całkowalna, tzn. że istnieje mnożnik całkujący  $\Lambda$  tej formy, który jest również funkcją stanu i który przekształca 1-formę  $dE - \dot{W}$  w formę całkowalną

$$dS = \Lambda \left( dE - \dot{W} \right), \tag{7}$$

gdzie S jest również funkcją stanu, nazywaną entropią układu. Ta funkcja, podobnie jak energia, jest również addytywna<sup>2</sup>.

Zauważmy na marginesie, że powyższe twierdzenie matematyczne jest trywialne w rozważanym przez nas przypadku dwóch zmiennych niezależnych  $\theta, V$ . W takim bowiem przypadku wszystkie 1-formy są całkowalne. Dla rozważanych dalej mieszanin, jak również dla ciał stałych całkowalność, a więc i istnienie funkcji entropii, przestają być trywialne.

#### Przykład matematyczny całkowania 1-formy:

rozważmy 1-formę ydx-xdy. Szukamy takiej funkcji  $\Lambda$ , że

$$ds = \Lambda \left( ydx - xdy \right).$$

Mamy

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy = \Lambda y dx - \Lambda x dy \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \Lambda y, \frac{\partial s}{\partial y} = -\Lambda x.$$

Po wyeliminowaniu mnożnika otrzymujemy równanie dla funkcji S

$$x\frac{\partial S}{\partial x} + y\frac{\partial S}{\partial y} = 0.$$

Równanie to ma ogólne rozwiązanie  $S=S\left(\frac{x}{y}\right)$ , gdzie funkcja jest zupełnie dowolna. Może mieć ona, na przykład postać  $S=C\frac{x}{y}$ , gdzie C jest dowolną stałą. Mnożnik ma wtedy postać  $\Lambda=C/y^2$ . Przykład ten pokazuje, że jeśli istnieje jeden mnożnik całkujący, to isnieje ich nieskończenie wiele.

Powracamy do rozważań termodynamicznych i zajmiemy się własnościami mnożnika  $\Lambda$ . Rozważmy dwa układy A i B w równowadze termicznej, znajdujące się, odpowiednio, w stanach  $(\theta, V_A)$ ,  $(\theta, V_B)$ . Na podstawie (7) mamy wtedy

$$dS_A = \Lambda_A (dE_A + p_A dV_A), \quad dS_B = \Lambda_B (dE_B + p_B dV_B), \tag{8}$$

 $<sup>^2</sup>$ Całkowalność formy oznacza po prostu możliwość zapisania jej iloczynu z mnożnikiem w postaci różniczki zupełnej pewnej funkcji, w naszym wypadku funkcji S.

dla infinitezymalnej zmiany tych stanów. Jednocześnie stan układu złożonego z układów A i B w kontakcie diatermicznym jest opisany przez wielkości  $(\theta, V_A, V_B)$  i jego zmiana energii E i entropii S ma postać

$$dE = dE_A + dE_B = -(p_A dV_A + p_B dV_B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dS = \Lambda (dE_A + dE_B + p_A dV_A + p_B dV_B).$$
(9)

Dokonamy zamiany zmiennych

$$(\theta, V_A) \to (\theta, S_A), \quad (\theta, V_B) \to (\theta, S_B).$$
 (10)

Uwzględniając (8) otrzymujemy

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial S}{\partial S_A} dS_A + \frac{\partial S}{\partial S_B} dS_B = \Lambda \left( \frac{dS_A}{\Lambda_A} + \frac{dS_B}{\Lambda_B} \right).$$

A wiec

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial S_A} = \frac{\Lambda}{\Lambda_A}, \quad \frac{\partial S}{\partial S_B} = \frac{\Lambda}{\Lambda_B}.$$
 (11)

Związki te implikują warunki całkowalności

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial S_A} = \frac{\partial^2 S}{\partial S_A \partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_A}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \theta \partial S_B} = \frac{\partial^2 S}{\partial S_B \partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_B}\right) = 0.$$
(12)

Można je zapisać w postaci

$$\frac{1}{\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = \frac{1}{\Lambda_A} \frac{\partial \Lambda_A}{\partial \theta} = \frac{1}{\Lambda_B} \frac{\partial \Lambda_B}{\partial \theta} = \mu(\theta). \tag{13}$$

gdzie  $\mu(\theta)$  jest dowolną funkcją temperatury empirycznej  $\theta$ . Całkowanie tych związków prowadzi do następującego multiplikatywnego przedstawienia mnożników

$$\Lambda_{A}(\theta, S_{A}) = \nu(S_{A}) \exp\left(\int \mu(\theta) d\theta\right),$$

$$\Lambda_{B}(\theta, S_{B}) = \nu(S_{B}) \exp\left(\int \mu(\theta) d\theta\right),$$

$$\Lambda(\theta, S_{A}, S_{B}) = \nu(S_{A}, S_{B}) \exp\left(\int \mu(\theta) d\theta\right).$$
(14)

Wprowadźmy notację

$$T(\theta) = \left[ C \exp\left( \int \mu(\theta) d\theta \right) \right]^{-1}, \tag{15}$$

gdzie C jest dowolną stałą dodatnią. Wielkość T nazywamy temperaturą absolutną. Jak wynika z powyższej konstrukcji jest ona funkcją uniwersalnq, tzn. taką samą dla każdego układu.

Tego rodzaju rozważania można również przeprowadzić dla układów bardzej złożonych, w których ilość zmiennych opisujących stan jest większa od dwóch.

W nowoczesnej termodynamice procesów nieodwracalnych (teorii pola) dowód istnienia temperatury absolutnej jest odmienny, ale opiera się również na założeniu addytywności energii, a więc na założeniu o istnieniu idealnych ścianek diatermicznych.

Podstawienie wyników (14), (15) do (8) daje

$$dS_A' = \frac{1}{T(\theta)} \left( dE_A + p_A dV_A \right), \quad S_A' = \frac{1}{C} \int \frac{dS_A}{\nu_A} + \text{const.}$$
 (16)

Ta nowa funkcja jest również nazywana entropią. Związek ten jest zupełnie ogólny, tzn. dla dowolnego układu zachodzi

$$dS = \frac{1}{T} \left( dE - \dot{W} \right),\tag{17}$$

i równanie to jest nazywane równaniem Gibbsa.

Bardzo często mylnie utożsamia się równanie Gibbsa z drugą zasadą termodynamiki. W rzeczywistości równanie to jest bardzo ważnym, ale nie jedynym wynikiem drugiej zasady termodynamiki i dotyczy jedynie tzw. odwracalnych (ang. reversible) zmian entropii. Obok tego równania, druga zasada termodynamiki określa tzw. funkcję dysypacji, która, na przykład, zabrania spontanicznego przepływu ciepła z obszarów cieplejszych do zimniejszych. Aby wprowadzić podobny element do rozważań w ramach termostatyki trzeba dokonać raczej sztucznego rozszerzenia pojęcia zmiany entropii. Mianowicie należy przyjąć, że całkowita zmiana entropii dS składa się z dwóch wkładów: części odwracalnej, która pojawia się w równaniu Gibbsa i wynika z transportu ciepła  $dS_{rev} = \dot{Q}/T$  i z części nieodwracalnej  $dS_{irr}$  (ang. irreversible), o której wiadomo jedynie, że jest nieujemna (dysypacja!)<sup>3</sup>. Wtedy dla pełnej zmiany entropii  $dS = dS_{rev} + dS_{irr} = dS_{irr} + \frac{\dot{Q}}{T}$  musi zachodzić nierówność

$$dS - \frac{\dot{Q}}{T} \equiv dS - \frac{1}{T} (dE + pdV) \ge 0, \tag{18}$$

gdzie skorzystaliśmy z pierwszej zasady termodynamiki. Tą nierówność można napisać w postaci

$$d\left(E - TS\right) \le -SdT - pdV. \tag{19}$$

Nierówność ta stanowi podstawę do analizy stabilności stanu równowagi termodynamicznej. Mówi ona, że energia swobodna Helmholtza  $\Psi = E - TS$  posiada minimum w stanie równowagi osiągniętym na drodze izotermicznej (dT = 0) i izochorycznej (dV = 0). Przeprowadzimy dalej taką analizę stabilności dla układu w izolacji adiabatycznej.

Przejdźmy do przedstawienia kilku prostych wniosków z równania Gibbsa. Załóżmy, że zmiennymi, opsującymi stan układu są temperatura absolutna T i objętość V. Mamy wtedy

$$dS = \frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial V}dV = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V} + p\right)dV\right). \tag{20}$$

 $<sup>^3</sup>$ W ogólnym przypadku nie można założyć nawet, że  $dS_{irr}$ , a więc i dS, są różniczkami zupełnymi jakichś funkcji. W tym sensie entropia nierównowagowa  $S_{irr}$  i entropia całkowita S mogą nie istnieć. Problem ten nie pojawia się w nowoczesnej termodynamice nierównowagowej, w której nie istnieje potrzeba wprowadzania  $S_{irr}$ .

Ponieważ dT i dV są dowolne wynika z tego związku natychmiast

$$\frac{\partial E}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T}, \quad p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V} - T \frac{\partial S}{\partial V}\right).$$
 (21)

Te ważne relacje sprzęgają związki konstytutywne (materiałowe) dla E,S i p. Można je napisać w prostszej postaci wprowadzając tzw. energię swobodną Helmholtza  $\Psi$ 

$$\Psi = E - TS = \Psi (T, V) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad E = \Psi - T\frac{\partial \Psi}{\partial T}, \quad p = -\frac{\partial \Psi}{\partial V}.$$
(22)

Tym samym, z równania Gibbsa wynika, że musimy znać tylko **jedną** funkcję konstytutywną dla energii swobodnej Helmholtza, a pozostałe dla energii wewnętrznej, entropii i ciśnienia otrzymuje się przez różniczkowanie. Mówimy, że energia swobodna Helmholtza jest potencjałem termodynamicznym przy tym wyborze zmiennych niezależnych.

Dokonajmy transformacji zmiennych

$$(T, V) \to (T, p)$$
. (23)

Wtedy równanie Gibbsa można napisać w postaci

$$dG = -SdT + Vdp, \quad G = E - TS + pV = G(T, p).$$
 (24)

Podobnie jak poprzednio otrzymujemy wykonując różniczkowanie

$$S = -\frac{\partial G}{\partial T}, \quad V = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad E = G - T\frac{\partial G}{\partial T} - p\frac{\partial G}{\partial p}.$$
 (25)

Dla tego wyboru zmiennych potencjałem termodynamicznym jest więc funkcja G, którą nazywa się energiq swobodną Gibbsa.

Wreszcie w przypadku transformacji

$$(T, V) \to (S.p)$$
, (26)

mamy

$$dH = TdS + Vdp, \quad H = E + pV = H(S, p),$$
 (27)

oraz

$$T = \frac{\partial H}{\partial S}, \quad V = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad E = H - p \frac{\partial H}{\partial p}.$$
 (28)

Potencjał H nazywamy entalpią.

**Tabela 1:** Zmienne stanu i potencjały termodynamiczne

zmienne stanu	– potencjał termodynamiczny
(E,V)	- entropia $S$
(T,V)	– energia swobodna Helmholtza $\Psi = E - TS$
(T,p)	– energia swobodna Gibbsa (entalpia swobodna) $G = E - TS + pV$
(S,p)	– entalpia $H = E + pV$

Powyższe zamiany zmiennych ilustrują tzw. transformację Legendre'a, w której zamiania zmiennych niezależnych prowadzi do odpowiedniej transformacji potencjału. Wybór zmiennych niezależnych jest dyktowany potrzebami praktycznymi, a zwłaszcza możliwościami kontroli odpowiednimi wielkościami w konkretnym eksperymencie. Np. w prostym mechanicznym eksperymencie rozciągania pręta możemy kontrolować siłę, do której dostosowuje się rozciągnięcie (ang. soft loading device), lub też rozciągnięcie, do którego dostosowuje się siła (ang. hard loading device). W termodynamice czasem łatwiej jest kontrolować temperaturę, a czasem (np. przy propagacji tzw. fal uderzeniowych) entropię.

Oprócz powyższych bezpośrednich wniosków z równania Gibbsa zależności konstytutywne prowadzą również do tzw. warunków całkowalności. Zademonstrujemy tu jeden przykład.

Wzór (20) zawiera po lewej stronie różniczkę zupełną. Oznacza to symetrię drugiej pochodnej mieszanej względem zmiennych T, V. Otrzymujemy więc

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{T} \frac{\partial E}{\partial T} \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial E}{\partial V} + p \right) \right], \tag{29}$$

lub po wykonaniu różniczkowania

$$\frac{\partial E}{\partial V} = T \frac{\partial p}{\partial T} - p. \tag{30}$$

Jest to przykład związku Maxwella. Czasami nazywa się ten związkiem równaniem Clausiusa-Clapeyrona. Związki tgo rodzaju wyprowadza się w termodynamice układów bardziej złożonych, niż ten rozważany w tych notatkach z analogicznych warunków całkowalności. Pełnią one bardzo ważną rolę praktyczną, na przykład przy eksperymentalnym określaniu potencjałów termodynamicznych. Związek (30) oznacza, że pochodna energii wewnętrznej nie musi być poszukiwana w trudnych eksperymentach kalorymetrycznych, ale wynika z tzw. termicznego równania stanu

$$p = p(T, V). (31)$$

Mimo to pewne eksperymenty kalorymetryczne są potrzebne do określenia energii wewnętrznej. Mianowicie z pierwszej zasady termodynamiki wynika

$$\dot{Q} = mc_v dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V} + p\right) dV, \quad c_v = \frac{1}{m} \frac{\partial E}{\partial T},$$
 (32)

gdzie  $c_v$  jest ciepłem właściwym przy stałej objętości. Biorąc pod uwagę (30) otrzymujemy

$$m\frac{\partial c_v}{\partial V} = T\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \quad \Rightarrow \quad mc_v = mc_v^0 + T\frac{\partial^2}{\partial T^2} \int_{V_0}^{V} pdV.$$
 (33)

Ten związek pokazuje, że ciepło właściwe wynika z termicznego równania stanu (31) z dokładnością do funkcji temperatury  $c_v^0(T)$ . Ta funkcja musi być wyznaczona w **jednym** eksperymencie kalorymetrycznym dla  $V = V_0$ .

Poprzez związki (30) i (33) otrzymujemy obie pochodne energii i przez zcałkowanie wynika z nich z dokładnością do dowolnej stałej tzw. kaloryczne równanie stanu

$$E = E(T, V). (34)$$

W wielu przypadkach jest wygodniej dokonywać pomiary, w których kontroluje się ciśnienie, a nie objętość. Z pierwszej zasad termodynamiki wynika dla zmiennych (T, p)

$$\dot{Q} = d(E + pV) - Vdp = \frac{\partial(E + pV)}{\partial T}dT + \left[\frac{\partial(E + pV)}{\partial T} - V\right]dp. \tag{35}$$

Należy zwrócić uwagę, że E + pV nie jest tu entalpią H, która jest potencjałem termodynamicznym dla zmiennych (S, p). Wielkość

$$c_p = \frac{1}{m} \frac{\partial (E + pV)}{\partial T}, \quad E = E(T, p), \quad V = V(T, p),$$

nazywa się ciepłem właściwym pod stałym ciśnieniem.

Powyższa zamiana zmiennych prowadzi również do następujących zależności

$$c_p - c_v = \frac{1}{m} \left( \frac{\partial E}{\partial V} + p \right) \frac{\partial V}{\partial T},$$
 (36)

tzn.

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \left[ \left( \frac{\partial E}{\partial V} \right) \Big|_{T=const.} + p \right] \frac{\partial V}{\partial T} \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right) \Big|_{V=const}^{-1}, \tag{37}$$

gdzie współczynnik  $\gamma$  jest nazywany wykładnikiem adiabatycznym. Pojawia się on często w dynamice gazów.

Niezależnie od powyżej opisanych zasad termodynamiki zakłada się dodatkowo stabilność stanu równowagi termodynamicznej. Przechodzimy do sformułowania i analizy tego warunku. Warunek stabilności stanu równowagi w przypadku układu izolowanego adiabatycznie (tzn.  $\dot{Q}=0, dS=0$ ) wymaga, aby entropia osiągała maksimum. W praktycznych zastosowaniach warunek ten czasami nie jest spełniony. Dotyczy to, na przykład, tzw. metastabilnych stanów równowagi, które prowadzą do przemian fazowych.

Rozważmy dwa identyczne układy termodynamiczne, z których każdy posiada energię E i objętość V. Połączmy te układy w jeden w izolacji adiabatycznej. Załóżmy, że stan początkowy układów został zaburzony i dla pierwszego ukadu jest teraz  $E + \delta E, V + \delta V$ , a dla drugiego  $E - \delta E, V - \delta V$ . Układ osiąga teraz spontanicznie nowy stan równowagi, który, zgodnie z powyższymi uwagami, jest stanem maksimum entropii. Ze względu na addytywność entropii mamy

$$S(2E, 2V) > S(E + \delta E, V + \delta V) + S(E - \delta E, V - \delta V). \tag{38}$$

Rozwińmy tą nierówność w szereg Taylora. Otrzymujemy  $(\frac{\partial S}{\partial E}=0,\frac{\partial S}{\partial V}=0)$ 

$$\frac{\partial^2 S}{\partial E^2} (\delta E)^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial E \partial V} \delta E \delta V + \frac{\partial^2 S}{\partial V^2} (\delta V)^2 < 0.$$
 (39)

Oznacza to, że tzw. Hesjan (macierz drugich pochodnych) musi być negatywnie określony. W wybranych zmiennych mamy również następujące zależności, wynikające bezpośrednio z równania Gibbsa

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}.$$
 (40)

Dokonując zamiany zmiennych  $(E, V) \rightarrow (T, V)$  otrzymujemy natychmiast

$$\frac{mc_v}{T^2} \left(\delta T\right)^2 - \frac{1}{T} \frac{\partial p}{\partial V} \left(\delta V\right)^2 > 0. \tag{41}$$

Z powyższej nierówności wynikają następujące warunki stabilności stanu równowagi termodynamicznej

$$c_v > 0, \quad \kappa_T > 0, \quad \kappa_T = -V \frac{\partial p}{\partial V},$$
 (42)

gdzie współczynnik  $\kappa_T$  jest nazywany isotermicznym modułem ściśliwości.

### 2.3 Równania stanu gazów idealnych

Gazy rzeczywiste o małych gęstościach zachowują się w wysokich temperaturach jak gazy idealne, tzn. ich termiczne równanie stanu  $p = p(\rho, T)$  można napisać w postaci

$$p = \rho \frac{R}{M_r} T$$
 gdzie  $R = 8,3143 \cdot 10^3 \frac{J}{\text{kg} \cdot \text{K}}, M_r = \frac{\mu}{\mu_0}.$  (43)

W tym wzorze T oznacza temperaturę mierzoną w skali Kelvina, R jest uniwersalną stałą gazową, a  $M_r$  jest względną masą molekularną. Początkowo definiowano ją jako stosunek masy molekularnej gazu  $\mu$  do masy atomowej wodoru  $\mu_H=1,67329\cdot 10^{-24}$  g. Wielkość  $M_r$  jest stabelaryzowana i przykładowo wynosi

$$\begin{array}{lcl} M_r^{H_2} & = & 2, & M_r^{O_2} = 32, & M_r^{N_2} = 28, & M_r^C = 12, \\ M_r^{Ar} & = & 40, & M_r^{Cl} = 35, & M_r^{Na} = 23. \end{array}$$

Współcześnie zamiast masy atomu wodoru stosuje się jako  $\mu_0$  1/12 masy atomowej węgla, która wynosi:  $\mu_0 = 1,66011 \cdot 10^{-27}$  kg. W zastosowaniach technicznych można tą modyfikację ignorować. Wprowadzono ją, gdyż wtedy względna masa molekularna  $M_r$  wielu związków jest liczbą całkowitą. Natomiast dla wodoru otrzymuje się w nowej konwencji  $M_r^H = 1,00794$ .

W zależności od zastosowań termiczne równanie stanu pisze się w różnych postaciach. Dla układów jednorodnych używa się jako zmiennych całkowitą masę  $m=\rho V$ , całkowitą liczbę cząstek  $N=\nu V$ . Wtedy

$$pV = m\frac{R}{M_r}T,$$

$$p\nu = \frac{R}{M_r}T \text{ gdzie } \nu = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}, \text{ lub stosując } m = N\mu, \quad M_r = \frac{\mu}{\mu_0}$$

$$pV = NkT \text{ gdzie } k = R\mu_0 = 1,38044 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K} - \text{stała Boltzmanna.}$$

$$(44)$$

 ${\bf W}$ chemii używa się jako jednostki masy tzw. mol

$$1 \text{ mol} = M_r \text{ g},$$

tzn. 1 mol każdej substancji zawiera taką samą liczbę molekuł. Jeśli oznaczymy tą liczbę przez A, to mamy

1 mol = 
$$A\mu$$
  $\Rightarrow$   $A = \frac{M_r}{\mu_0} = \frac{1 \text{ g}}{\mu_0} = 6,021367 \cdot 10^{23}.$ 

Liczba A nazywa się liczbą Avogadro. Z termicznego równania stanu wynika dla warunków normalnych: p=1 atm, T=273.15 K (0<sup>0</sup> C), N=A

$$V_{mol} = \frac{NkT}{p} = 22,4207 \text{ litrów.}$$

Powietrze jest mieszaniną gazów

78,08% azotu  $N_2$ , 20,95% tlenu  $O_2$ , 0,94% argonu Ar, 0,03% dwutlenku węgla  $CO_2$ .

Wynika stąd masa molekularna powietrza

$$\mu_L = 0,7808\mu_{N_2} + 0,2095\mu_{O_2} + 0,009\mu_{Ar} + 0,0003\mu_{CO_2} \quad \Rightarrow \quad M_r^L = \frac{\mu_L}{\mu_0} = 28,96. \eqno(45)$$

W odróżnieniu od termicznego równania stanu, określającego związek konstytutywny (materiałowy) dla ciśnienia, kaloryczne równanie stanu określa związek konstytutywny dla właściwej energii wewnętrznej  $\varepsilon$  ( $\rho T$ ). Dla gazów idealnych

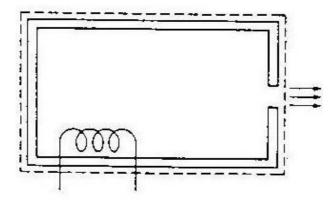
$$\varepsilon = z \frac{R}{M_r} T + \alpha, \tag{46}$$

gdzie z jest stałą:

$$z = \begin{cases} \frac{3}{2} & \text{dla gazów jednoatomowych,} \\ \frac{5}{2} & \text{dla gazów dwuatomowych,} \\ 3 & \text{dla gazów wieloatomowych.} \end{cases}$$
 (47)

Stała  $\alpha$  jest różna dla różnych gazów i jest ona istotna w opisach reakcji chemicznych. Należy zwrócić uwagę, że energia wewnętrzna gazów idealnych jest niezależna od ciśnienia.

**Przykład 1:** ogrzewanie pomieszczenia z małym otworem. Rozpatrzymy zmianę temperatury w pomieszczeniu z małym otworem o powierzchni A, które jest ogrzewane źródłem ciepła o stałej intensywności I:  $\dot{Q} = Idt$  (porównaj adnotację dotyczącą interpretacji  $\dot{Q}$ ). Zakładamy, że pomieszczenie jest w osłonie adiabatycznej, i pomijamy niejednorodność rozkładu temperatury T, a więc i energii wewnętrznej  $\varepsilon$ , w przestrzeni. Pomijamy również wpływ energii kinetycznej, zakładając, że ruch powietrza jest bardzo powolny.



Rys.1: Szkic pomieszczenia z otworem

Zasada zachowania masy i zasada zachowania energii mają postać

$$\frac{dm}{dt} + \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} A = 0.$$

$$\frac{d(m\varepsilon)}{dt} + \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} A = I,$$

$$(48)$$

gdzie  $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  oznacza prędkość powietrza w kierunku prostopadłym do otworu. Postać zasady zachowania masy wynika z faktu, że masa powietrza w pomieszczeniu nie jest stała, gdyż następuje wypływ przez otwór. Jednocześnie zmiana całkowitej energii w układzie  $d\left(m\varepsilon\right)$  jest spowodowana nie tylko pracą sił powierzchniowych  $(pA)\left(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}\right)dt$  (tzn. tam, gdzie prędkość jest różna od zera), ale również utratą energii przez układ, spowodowaną wypływem:  $(\rho A\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}dt)\varepsilon$ . Uzasadnienie postaci tych związków jest proste w przypadku teorii ośrodków niejednorodnych i powrócimy do niego później.

Po wyeliminowaniu wypływu przez otwór  $\rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} A$  z tych równań otrzymujemy

$$m\frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{p}{\rho}\frac{dm}{dt} = I. \tag{49}$$

Jednocześnie zakładając, że powietrze jest gazem idealnym mamy z (44) i (46)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{5}{2} \frac{R}{M_r} \frac{dT}{dt}, \quad \frac{p}{\rho} = \frac{R}{M_r} T. \tag{50}$$

Ostatni związek można następująco przekształcić

$$pV_0 = m\frac{R}{M_r}T = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{dt}\frac{R}{M_r}T + m\frac{R}{M_r}\frac{dT}{dt} = 0.$$

Zauważmy, że założenie o stałym ciśnieniu prowadzi do wniosku, że wzrostowi temperatury T musi towarzyszyć zmniejszenie się masy powietrza w pomieszczeniu m. Ostatecznie równanie (49) przyjmuje postać

$$(z+1) pV_0 \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = I \quad \Rightarrow \quad T(t) = T(0) \exp\left\{\frac{It}{(z+1) pV_0}\right\}. \tag{51}$$

Rozwiązanie to oznacza, że przy stałej intensywności grzejnika temperatura pomieszczenia bardzo szybko rośnie. W rzeczywistości uwzględnienie strat przez ściany pomieszczenia prowadzi do osiągnięcia przez temperaturę pewnej wartości maksymalnej.

**Przykład 2:** Kompresja gazu w pojemniku. Pojemnik ma powierzchnię przekroju A i wysokość początkową  $H_A$ . Od góry pojemnik zamknięty jest pokrywą o masie m. Ciśnienie zewnętrzne na pokrywę wynosi  $p_0$ . Powietrze zamknięte adiabatycznie w pojemniku ma masę  $m_p$ , temperaturę początkową  $T_A$  i ciśnienie początkowe  $p_A$ . W chwili początkowej pokrywa jest utrzymywana na wysokości  $H_A$  przez sworznie, tzn.  $(p_0 - p_A) A \neq mg$ . Określić stan końcowy gazu  $(p_E, T_E, H_E)$  po usunięciu sworzni.

Energia wewnętrzna powietrza, o którym zakładamy, że jest gazem idealnym, jest dana wzorem

$$\rho \varepsilon = \rho z_p \frac{R}{M_r} T, \quad M_r = 28,96, \quad z_p = \frac{5}{2}, \quad R = 8,3143 \times 10^3 \left[ \frac{J}{\text{kg K}} \right].$$
(52)

Zasada zachowania energii po uwzględnieniu zasady zachowania pędu i dla procesu adiabatycznego w pojemniku jest następująca

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \rho \varepsilon dV = -\int_{A} p_{0} \frac{dH}{dt} dA - mg \frac{dH}{dt}, \quad V = AH(t),$$
 (53)

gdzie H(t) określa aktualne położenie pokrywy, tzn.

$$\frac{d}{dt} \left[ m_p z_p \frac{R}{M_r} T \right] = -\left( p_0 A + mg \right) \frac{dH}{dt}, \quad m_p = \rho H A = \text{const.}, \tag{54}$$

gdzie ostatni związek wynika z zasady zachowania masy. Po scałkowaniu po czasie otrzymujemy

$$\frac{5}{2}m_{p}\frac{R}{M_{r}}T_{E} + (p_{0}A + mg)H_{E} = \frac{5}{2}m_{p}\frac{R}{M_{r}}T_{A} + (p_{0}A + mg)H_{A}.$$
 (55)

Bilans pędu prowadzi w stanie końcowym do równania równowagi

$$p_E A = p_0 A + mg. (56)$$

Wreszcie z kalorycznego równania stanu wynika

$$p_E A H_E = m_p \frac{R}{M_r} T_E. (57)$$

Rozwiązanie powyższego układu równań daje

$$T_E = \frac{5}{7}T_A + \frac{2}{7}\frac{p_0 A + mg}{m_p \frac{R}{M}}H_A, \quad H_E = \frac{2}{7}H_A + \frac{5}{7}\frac{m_p \frac{R}{M_r}}{p_0 A + mg}T_A.$$
 (58)

Sprawdźmy wartości liczbowe teych wyników w przypadku następujących danych

$$T_A = 293^{0}\text{K}, \quad V_A = 1 \text{ litr} = 10^{-3}\text{m}^{3}, \quad H_A = 10^{-1}\text{m},$$
  
 $p_0 = 10^{5}\text{Pa}, \quad m = 10^{3}\text{kg}, \quad q = 9,81 \text{ m/s}^{2}, \quad m_n = 10^{-3}\text{kg}.$  (59)

Po podstawieniu otrzymujemy

$$T_E = 1285^0 \text{K}, \quad H_E = 0.03 \text{m}.$$
 (60)

**Przykład 3** (adiabatyczne równanie stanu gazu doskonałego): W przypadku quasistatycznym zasada zachowania energii w procesach adiabatycznych ma postać

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \rho \varepsilon dV = -\int_{V} p \operatorname{div} \mathbf{v} dV. \tag{61}$$

Dla stałego ciśnienia w naczyniu możemy wykorzystać tożsamość, która była wykorzystywana w analizie równań bilansu

$$\frac{d}{dt} \int_{V} f dV = \int_{V} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oint_{\partial V} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_{V} dV = \oint_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA = \int_{V} \operatorname{div} \mathbf{v} dV. \quad (62)$$

Otrzymujemy więc dla gazu idealnego

$$\frac{d}{dt}\left(\rho z \frac{R}{M_r} TV\right) = -p \frac{dV}{dt}.$$
(63)

Z zasady zachowania masy  $\rho V = \text{const}$  wynika wtedy

$$z\frac{1}{T}\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}. (64)$$

Po rozwiązaniu tego równania mamy ostatecznie

$$VT^z = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad pV^{\kappa} = \text{const.}, \quad \kappa = \frac{z+1}{z} > 1.$$
 (65)

Współczynnik  $\kappa$  jest nazywany wykładnikiem adiabaty. Ponieważ jest on większy od jedności krzywe adiabatyczne na płaszczyźnie (V, p) mają większy spadek niż izotermy. Oznacza to, że rozprężanie adiabatyczne wywołuje chłodzenie, a kompresja grzanie. Ten efekt jest wykorzystywany w budowie silników cieplnych.

Przykład 4 (wzór barometryczny): w meteorologii zakłada się, że gradient temperatury powietrza w atmosferze ziemskiej jest zadany wzorem

$$\gamma = \frac{0.65^{0} \text{K}}{100 \text{m}} \quad \Rightarrow \quad T = T_G - \gamma x_3. \tag{66}$$

gdzie  $T_G$  jest temperaturą na poziomie gruntu. Wzór ten obowiązuje w przybliżeniu do wysokości 10 km. Powyżej temperatura jest stała i równa  $-50^{\circ}$ C.

Na podstawie równania bilansu pędu mamy

$$-\frac{\partial p}{\partial x_3} - \rho g = 0, \quad p = \rho \frac{R}{M_r} T. \tag{67}$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x_3} = -g\frac{M_r}{R}\frac{1}{T_G}\frac{1}{1 - \frac{\gamma}{T_G}x_3}.$$
(68)

Rozwiązanie tego równania ma postać

$$p = p_G \left( 1 - \frac{\gamma}{T_G} x_3 \right)^{gM_r/R\gamma}. \tag{69}$$

Do wysokości ok. 5 km wystarczy uwzględniać pierwsze dwa człony w rozwinięciu w szereg Taylora

$$p \approx p_G - \delta x_3, \quad \delta = \frac{p_G}{(R/M_r) T_G} = \frac{1 \text{hPa}}{8,2684 \text{m}}$$
 (70)

Dla  $\gamma \to 0$  możemy również napisać

$$p \approx p_G \exp\left(-\frac{gM_r}{RT_G}x_3\right). \tag{71}$$

Jest to tzw. wzór barometryczny.

W poniższej tabeli podano przykładowe zmiany średniego ciśnienia z wysokością:

wysokość	ciśnienie, hPa	przykł. miejsce
0	1013,25	Gdańsk
500	954,61	Rabka
1000	898,78	Kuźnice
2500	746,86	Rysy
4500	577,33	Matterhorn
9000	307,48	Mount Everest

### 2.4 Termodynamika układów wieloskładnikowych

Rozpatrzmy teraz układ termodynamiczny, który jest jednorodną mieszaniną A rozróżnialnych składników. W termostatyce nie interesują nas procesy względnego ruchu składników, tzn. procesy dyfuzyjne, których opis wykracza poza zakres klasycznej termostatyki. Teoria takich mieszanin jednorodnych została skonstruowana przez Gibbsa.

Następujące pojęcia charakteryzują mieszaninę A składników

Tabela 2: Zmienne termodynamiczne dla mieszanin

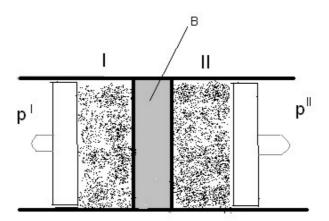
$m_a$	– masa całkowita składnika $a, a = 1,, A$
$\rho_a = m_a/V$	– parcjalna gęstość masy składnika <i>a</i>
$v_a = V/m_a$	– objętość właściwa ( $V$ - objętość przy ciśnieniu $p$ i temperaturze $T$ )
$c_a = m_a/m$	– koncentracja składnika $a$ ( $m = \sum_{b=1}^{A} m_a$ - masa całkowita)
$N_a$	$-$ ilość cząsteczek składnika $\boldsymbol{a}$
$\nu_a = N_a/A$	- liczba molowa (A – liczba Avogadro, $6,0221367 \times 10^{23} \mathrm{mol}^{-1}$ )
$n_a = N_a/V$	– gęstość cząsteczkowa
$X_a = \nu_a/\nu$	– ułamek molowy ( $\nu = \sum_{a=1}^{A} \nu_a$ – całkowita ilość moli)
$V_a/V$	– udział objętościowy ( $V_a$ – objętość czystej substancji $a$ przy $p$ i $T$ )
$p_a/p$	– stosunek ciśnień

gdzie  $p_a$  jest tzw. ciśnieniem parcjalnym, a ciśnienie całkowite p, całkowita gęstość masy  $\rho$ , całkowita gęstość energii wewnętrznej  $\varepsilon$  i całkowita gęstość entropii s są dane związkami

$$p = \sum_{a=1}^{A} p_a, \quad \rho = \sum_{a=1}^{A} \rho_a, \quad \rho \varepsilon = \sum_{a=1}^{A} \rho_a \varepsilon_a, \quad \rho s = \sum_{a=1}^{A} \rho_a s_a.$$
 (72)

Ponieważ układ jest jednorodny, więc całkowitą energię, entropię, itd. otrzymuje się mnożąc gęstości przez masę m.

Najważniejszym potencjałem termodynamicznym dla dowolnie wybranego składnika a mieszaniny jest tzw. potecjał chemiczny  $\mu_a$ . Jego waga wynika z faktu, że, w przeciwieństwie do ciśnienia parcjalnego  $p_a$  jest on ciągły na tzw. błonach półprzepuszczalnych. Błony półprzepuszczalne są to przegrody między układami, które są przepuszczalne tylko dla pewnych, a nie dla wszystkich składników. Przechodzimy do skonkretyzowania tych uwag.



Rys. 2: Błona półprzepuszczalna B między dwoma mieszaninami zawierającymi składnik a.

Rozpatrzmy układ w stałej temperaturze T przedstawiony schematycznie na Rys.2. Po obu stronach błony B półprzepuszczalnej dla składnika a znajduje się mieszanina, w której schematycznie zaznaczone tłoki utrzymują stałe ciśnienia całkowite  $p^I$  i  $p^{II}$ . Zgodnie z warunkiem stabilności (19) mamy dla tego układu

$$d(E - TS) \leq -SdT - p^{I}dV^{I} - p^{II}dV^{II} \Rightarrow$$

$$d(E - TS + p^{I}V^{I} + p^{II}V^{II}) \leq -SdT + V^{I}dp^{I} + V^{II}dp^{II} = 0.$$

$$(73)$$

A więc wielkość  $G = (E^I - TS^I + p^IV^I) + (E^{II} - TS^{II} + p^{II}V^{II})$  osiąga w stanie równowagi minimum (w dowolnym procesie zmierzającym do stanu równowagi, musi ona maleć). Wielkość ta jest nazywana entalpiq swobodną całego układu i jest ona sumą entalpii swobodnej obu podukładów. Z uwagi na fakt, że po obu stronach błony może się znajdować inna mieszanina te entalpie swobodne mogą być funkcjami różnych zmiennych. Oczywiście muszą one zależeć od temperatury i całkowitego ciśnienia, ale także od udziału wagowego poszczególnych składników. Mamy więc dla całkowitej entalpii swobodnej G

$$G = G^{I}(T, p^{I}, m_{1}^{I}, ..., m_{a}^{I}, ..., m_{A^{I}}^{I}) + G^{II}(T, p^{II}, m_{1}^{II}, ..., m_{a}^{II}, ..., m_{A^{II}}^{II}).$$
 (74)

Ze względu na to, że błona B jest przepuszczalna tylko dla składnika a, wszystkie zmienne z wyjątkiem  $m_a^I, m_a^{II}$  są w tym związku stałe, przy czym suma  $m_a = m_a^I + m_a^{II}$  też musi być stała. Warunek minimum ma więc postać

$$\frac{\partial G}{\partial m_a^I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial G^I}{\partial m_a^I} = \frac{\partial G^{II}}{\partial m_a^{II}}.\tag{75}$$

Oznacza to, że ta pochodna jest w stanie równowagi ciągła na błonie półprzepuszczalnej. Z tego powodu definiujemy potencjał chemiczny związkiem

$$\mu_a = \frac{\partial G}{\partial m_a}.\tag{76}$$

Wtedy warunek równowagi ma postać

$$\mu_a^I(T, p^I, m_1^I, ..., m_{A^I}^I) = \mu_a^{II}(T, p^{II}, m_1^{II}, ..., m_{A^{II}}^{II}). \tag{77}$$

Definicja (76) prowadzi natychmiast do następującego warunku całkowalności

$$\frac{\partial \mu_a}{\partial m_b} = \frac{\partial \mu_b}{\partial m_a}. (78)$$

Dodatkowo, addytywność swobodnej entalpii G daje zależność

$$G = \sum_{a=1}^{A} \mu_a m_a. \tag{79}$$

Mianowicie rozważmy układ powiększony z-krotnie. Mamy wtedy

$$G(T, p, zm_1, ..., zm_A) = zG(T, p, m_1, ..., m_A).$$

Różniczkując względem z otrzymujemy

$$\sum_{a=1}^{A} \frac{\partial G\left(T, p, zm_{1}, ..., zm_{A}\right)}{\partial \left(zm_{a}\right)} m_{a} = \sum_{a=1}^{A} \frac{\partial G\left(T, p, m_{1}, ..., m_{A}\right)}{\partial m_{a}} m_{a} = G\left(T, p, m_{1}, ..., m_{A}\right).$$

Biorac pod uwagę (76) otrzymujemy (79).

Oznacza to również, że addytywność G powoduje niezmienniczość potencjału chemicznego ze względu na powiększanie układu, tzn.

$$\mu_a(T, p, zm_1, ..., zm_A) = \mu_a(T, p, m_1, ..., m_A)$$
.

Jest to możliwe tylko wtedy, gdy potecjał chemiczny  $\mu_a$  nie zależy bezpośrednio od masy składników, a jedynie od ich stosunków, a więc, na przykład koncentracji  $c_b$  lub ułamków

molowych 
$$X_b$$
,  $b = 1, ..., A - 1$   $(X_A = -\sum_{a=1}^{A-1} X_a!)$ ,

$$\mu_a = \mu_a (T, p, X_1, ..., X_{A-1}). \tag{80}$$

Na skutek tej własności potecjał chemiczny układu jednoskładnikowego jest identyczny z jego gęstością entalpii swobodnej g = G/m.

Różniczkowanie związku (79) względem  $m_b$  daje

$$\frac{\partial G}{\partial m_b} = \mu_b + \sum_{a=1}^{A} \frac{\partial \mu_a}{\partial m_b} m_a \quad \Rightarrow \quad \sum_{a=1}^{A} \frac{\partial \mu_a}{\partial m_b} m_a = 0,$$

a biorąc pod uwagę warunek całkowalności (78)

$$\sum_{a=1}^{A} \frac{\partial \mu_b}{\partial m_a} m_a = 0. \tag{81}$$

Związek ten nosi nazwę *związku Gibbsa-Duhema*. Ma on duże znaczenie w zastosowaniach termostatyki.

Pozostaje jeszcze sformułować wzór Gibbsa dla mieszanin. Na podstawie definicji potencjału chemicznego (76) ma on postać

$$dG = -SdT + Vdp + \sum_{a=1}^{A} \mu_a dm_a. \tag{82}$$

Wynikają z tego równania następujące związki Maxwella (warunki całkowalności)

$$\frac{\partial S}{\partial m_a} = -\frac{\partial \mu_a}{\partial T} \quad i \quad \frac{\partial V}{\partial m_a} = \frac{\partial \mu_a}{\partial p}.$$
 (83)

Mieszanina gazów idealnych jest oparta na związkach materiałowych, analogicznych do związków (43), (IG3) dla gazów jednoskładnikowych. Dla ciśnienia parcjalnego  $p_{\alpha}$ , parcjalnej wewnętrzenej energii właściwej  $\varepsilon_{\alpha}$  i parcjalnej entropii właściwej  $\eta_{\alpha}$  mamy

$$p_{\alpha} = \rho_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} T, \quad \varepsilon_{\alpha} = z_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} T + \alpha_{\alpha}, \quad s_{\alpha} = z_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} \ln T - \frac{R}{M_{\alpha}} \ln \rho_{\alpha} + \beta_{\alpha},$$
 (84)

gdzie  $\alpha_{\alpha}, \beta_{\alpha}$  są stałymi. Odgrywają one istotną rolę w opisie reakcji chemicznych.

Energia wewnętrzna E, entropia S i entalpia swobodna G mieszaniny mają wtedy postać

$$E = \sum_{\alpha=1}^{A} m_{\alpha} \left( z_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} T + \alpha_{\alpha} \right),$$

$$S = \sum_{\alpha=1}^{A} m_{\alpha} \left( (z_{\alpha} + 1) \frac{R}{M_{\alpha}} \ln T - \frac{R}{M_{\alpha}} \ln p + \beta_{\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^{A} m_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} \ln \frac{p}{p_{\alpha}}, \qquad (85)$$

$$G = \sum_{\alpha=1}^{A} m_{\alpha} g_{\alpha} - T \sum_{\alpha=1}^{A} m_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} \ln \frac{p}{p_{\alpha}}, \quad g_{\alpha} = g_{\alpha} (p, T),$$

gdzie

$$p = \sum_{\alpha=1}^{A} p_{\alpha},$$

$$g_{\alpha} = \left(z_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} T + \alpha_{\alpha}\right) - T\left((z_{\alpha} + 1) \frac{R}{M_{\alpha}} \ln T - \frac{R}{M_{\alpha}} \ln p + \beta_{\alpha}\right) + \frac{RT}{M_{\alpha}},$$
(86)

a ostatni człon we wzorze  $(85)_2$  na entropię S nazywa się entropią mieszania. Może on być również napisany w postaciach

$$\sum_{\alpha=1}^{A} m_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} \ln \frac{p}{p_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{A} m_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} \ln \frac{N}{N_{\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{A} m_{\alpha} \frac{R}{M_{\alpha}} \ln \frac{\sum_{\beta=1}^{A} m_{\beta}/M_{\beta}}{m_{\alpha}/M_{\alpha}}.$$
 (87)

Na tym kończymy ten krótki przegląd termostatyki.

# 3 Wymiana ciepła

## 3.1 Podstawowe jednostki

**Tabela 3:** Oznaczenia SI dla dziesiętnych wielokrotności i dziesiętnych części jednostek podstawowych

deka	da	$10^{1}$	$\operatorname{decy}$	d	$10^{-1}$
hekto	h	$10^{2}$	centy	$\mathbf{c}$	$10^{-2}$
kilo	k	$10^{3}$	${ m mili}$	$\mathbf{m}$	$10^{-3}$
mega	M	$10^{6}$	$_{ m mikro}$	$\mu$	$10^{-6}$
giga	G	$10^{9}$	nano	$\mathbf{n}$	$10^{-9}$
tera	${ m T}$	$10^{12}$	piko	p	$10^{-12}$
peta	Ρ	$10^{15}$	femto	f	$10^{-15}$
exa	$\mathbf{E}$	$10^{18}$	atto	a	$10^{-18}$

**Tabela 4:** Jednostki ciśnienia i naprężenia (SI: 1Pascal=1kg/s²m)

$Pa = \frac{N}{m^2}$	$at = \frac{kp}{cm^2}$	atm	bar	torr	$mmWs = \frac{kp}{m^2}$
1	$1,02 \cdot 10^{-5}$	$9,87 \cdot 10^{-6}$	$10^{-5}$	$75 \cdot 10^{-4}$	0,102
$9.81 \cdot 10^4$	1	0,968	0,981	736	$10^{4}$
$1.013 \cdot 10^5$	1,033	1	1,013	760	$1,033\cdot10^4$
$10^{5}$	1,02	0,987	1	750	$1,02\cdot10^4$
133	$1,36\cdot10^{-3}$	$1,32\cdot10^{-3}$	$1,33\cdot10^{-3}$	1	13,6
9.81	$10^{-4}$	$9,68 \cdot 10^{-5}$	$9,81 \cdot 10^{-5}$	$7,36\cdot10^{-2}$	1

**Tabela 5:** Jednostki siły (SI: 1Newton=1kg·m/s²)

N	kp	Mp	p	dyna
1	0,102	$1,02 \cdot 10^{-4}$	102	$10^{5}$
9,81	1	$10^{-3}$	$10^{3}$	$9,81 \cdot 10^5$
$9,81 \cdot 10^3$	$10^{3}$	1	$10^{6}$	$9,81 \cdot 10^{8}$
$9,81\cdot10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	1	981
$10^{-5}$	$1,02\cdot 10^{-6}$	$1,02\cdot 10^{-9}$	$1,02\cdot10^{-3}$	1

**Tabela 6:** Jednostki energii i pracy (SI: 1 Joule=1kg·m²/s²)

J	$_{ m kpm}$	kWh	kcal	erg	eV
1	0,102	$2,78 \cdot 10^{-7}$	$2,39 \cdot 10^{-4}$	$10^{7}$	$6,24\cdot10^{18}$
9,81	1	$2,72\cdot10^{-6}$	$2,34\cdot10^{-3}$	$9,81 \cdot 10^7$	$6,12\cdot10^{19}$
$3,6\cdot10^{6}$	$3,67 \cdot 10^5$	1	860	$3,6\cdot10^{13}$	$2,25\cdot10^{25}$
$4,19 \cdot 10^3$	427	$1,16\cdot10^{-3}$	1	$4,19\cdot10^{10}$	$2,61\cdot10^{22}$
$10^{-7}$	$1,02\cdot10^{-8}$	$2,78 \cdot 10^{-14}$	$2,39 \cdot 10^{-11}$	1	$6,24\cdot10^{11}$
$1,6\cdot 10^{-19}$	$1,63\cdot10^{-20}$	$4,45 \cdot 10^{-26}$	$3,83\cdot10^{-23}$	$1,6\cdot 10^{-12}$	1

**Tabela 7:** Jednostki mocy (SI: 1Watt=1kg·m<sup>2</sup>/s<sup>3</sup>)

W	kW	$\frac{\text{kpm}}{\text{s}}$	PS	$\frac{\text{cal}}{\text{s}}$	kcal h
1	$10^{-3}$	0.102	$1,36\cdot10^{-3}$	0,239	0,86
$10^{3}$	1	102	1,36	239	860
9,81	$9,81\cdot10^{-3}$	1	$1,33\cdot10^{-2}$	2,34	8,43
736	0,736	75	1	176	632
4,19	$4,19\cdot10^{-3}$	0,427	$5,69 \cdot 10^{-3}$	1	3,6
1,16	$1,16\cdot10^{-3}$	0,119	$1,58 \cdot 10^{-3}$	0,278	1

## 3.2 Zasady zachowania

Podstawy fizyczne opisu wymiany ciepła opierają się na zasadach zachowania masy, pędu i energii. Dla dowolnego układu zasady te mają postać

$$M_2 - M_1 = 0, \quad \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \mathbf{S}_{1 \to 2},$$
 (88)  
 $E_2 - E_1 = W_{1 \to 2} + Q_{1 \to 2},$ 

gdzie  $M_1, M_2$  oznaczają, odpowiednio, całkowitą masę układu w stanie początkowym 1 i w stanie końcowym 2,  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  oznaczają pęd układu (wektor! z tego powodu litery, oznaczające pęd są **tłuste**) w stanie początkowym 1 i w stanie końcowym 2,  $\mathbf{S}_{1\to 2}$  oznacza siłę, która jest potrzebna do tej zmiany pędu,  $E_1, E_2$  oznaczają całkowite energie układu w tych dwóch stanach,  $W_{1\to 2}$  jest pracą mechaniczną, wykonaną na układzie przy zmianie stanu  $1\to 2$ , i wreszcie  $Q_{1\to 2}$  jest całkowitą wymianą ciepła między układem a otoczeniem w trakcie tej zmiany stanu. Równanie pędu ma następującą postać w układzie współrzędnych kartezjańskich

$$P_{2i} - P_{1i} = S_{1 \to 2i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad \mathbf{P}_{1,2} = \sum_{i=1}^{3} P_{1,2i} \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{S}_{1 \to 2} = \sum_{i=1}^{3} S_{1 \to 2i} \mathbf{e}_i,$$
 (89)

gdzie kierunek wersora  $\mathbf{e}_i$  (tzn. wektora o długości jednostkowej:  $|\mathbf{e}_i| = \sqrt{\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i} = 1$ ) odpowiada osi współrzędnych  $x_i$ . Często stosuje się oznaczenie  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ .

Energia całkowita E jest sumą energii kinetycznej K i energii potencjalnej U. Energia kinetyczna jest wynikiem makroskopwego ruchu układu. W trakcie procesu nie może ona zniknąć, ale może być przetransformowana w mikroskopową energię kinetyczną ruchu cząsteczek lub molekuł, którą odbieramy makroskopowo jako ciepło. Makroskopowa energia potencjalna powstaje z tej mikroskopowej energii kinetycznej i z mikroskopowej energii oddziaływania między cząsteczkami. Ulega ona, na przykład, zmianie, gdy na skutek makroskopowej deformacji zmienią się odległości między cząsteczkami, a tym samym ich oddziaływanie.

Zasady zachowania mają dwie cechy charakterystyczne, które umożliwiają ich praktyczne stosowanie. Po pierwsze wielkości, które spełniają zasady zachowania, a więc masa, pęd i energia występują w zasadach zachowania tylko w postaci różnicy między stanem końcowym i początkowym. Ich wartości w stanach pośrednich, przez które układ przechodzi aby osiągnąć stan końcowy, nie występują w tych równaniach. Oznacza to matematycznie, że lewe strony równań można napisać w postaci całek z pochodnych po

czasie. Po drugie, wielkości te są addytywne. Oznacza to, że masa, pęd i energia układu, który składa się z dwóch podukładów są sumami masy, pędu i energii tych podukładów. Oznacza to matematycznie, że można wprowadzić pojęcia gęstości masy, pędu i energii, których całki po objętości układu niejednorodnego (wielkości opisujące taki układ zależą nie tylko od czasu t, ale również od miejsca  $\mathbf{x}$ ) określają całkowitą masę, pęd i energię. Wykorzystując te własności można zapisać powyższe zasady w następującej postaci

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho dV = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{v} dV = \oint_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t}_n dA + \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} dV,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \rho \left( \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV = \oint_{\partial \mathcal{B}} \left( \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v} - q \right) dA + \int_{\mathcal{B}} \rho \left( \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r \right).$$
(90)

W równaniach tych pojawiła się pochodna czasowa  $\frac{d}{dt}$ , gdyż całkowanie po lewej stronie między dwoma różnymi chwilami – początkową i końcową – prowadzi do różnic wielkości, które występowały w wyjściowych równaniach. Całki objętościowe  $\int_{-\pi}^{\pi}...dV$  rozciągają

się na cały obszar układu  $\mathcal{B}$ . Natomiast całki powierzchniowe  $\oint_{\partial B} ...dA$  odnoszą się do

powierzchni układu  $\partial \mathcal{B}$ .  $\rho$  oznacza gęstość masy, która zależy od wybranego punktu  $\mathbf{x}$  układu  $\mathcal{B}$  i od czasu t. Jej jednostką jest  $\frac{kg}{m^3}$ .  $\mathbf{v}$  oznacza prędkość układu w punkcie  $\mathbf{x}$  i w chwili t. Jej jednostką jest  $\frac{m}{s}$ . Iloczyn  $\rho \mathbf{v}$  jest nazywany gęstością pędu.  $\mathbf{t}_n$  oznacza  $gęstość sił powierzchniowych, działających na układ przez powierzchnię <math>\partial \mathcal{B}$ , tzn. siłę na jednostkę powierzchni w punkcie  $\mathbf{x}$  powierzchni i w chwili czasu t. Jej jednostką jest  $\frac{N}{m^2}$  (porównaj wykaz w Tabeli  $\mathbf{4}$ ). Można udowodnić (twierdzenie Cauchy'ego), że ta siła daje się zapisać w postaci

$$\mathbf{t}_{n} = \mathbf{T}\mathbf{n}$$
, lub w układzie współrzędnych kartezjańskich (91)  $t_{ni} = \sum_{i=1}^{3} T_{ij} n_{j}$ ,

gdzie **T** jest niezależne od **n**. W tym wzorze **n** jest wektorem jednostkowym, prostopadłym w punkcie **x** do powierzchni  $\partial \mathcal{B}$  i skierowanym na zewnątrz układu. Inaczej mówiąc iloczyn skalarny  $n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i$  określa cosinusy kierunkowe wektora **n**.  $T_{ij}$  nazywamy tensorem naprężenia. Stosuje sie dla niego różne oznaczenia, na przykład  $\sigma_{ij} = T_{ij}$ , lub  $\sigma_{11} = \sigma_x, \sigma_{22} = \sigma_y, \sigma_{33} = \sigma_z, \sigma_{12} = \tau_{xy}, \sigma_{13} = \tau_{xz}, \sigma_{23} = \tau_{yz}$ , itd. Tensor ten jest symetryczny  $T_{ij} = T_{ji}$ , tzn. macierz  $T_{ij}$  posiada tylko sześć niezależnych elementów. Symetria ta wynika z zasady zachowania krętu, której nie będziemy bliżej omawiali w tych notatkach.

 $\rho$ **b** jest *gęstością sił objętościowych* i w praktycznych zastosowaniach jest to na ogół siła ciężkości, tzn. **b** = g**e**<sub>3</sub> w przypadku, gdy wybierzemy oś  $x_3 = z$  w kierunku działania przyśpieszenia ziemskiego g.

 $\varepsilon$  oznacza gęstość energii wewnętrznej układu na jednostkę masy, tzn. jej jednostką jest  $\frac{J}{kg}$ . W zastosowaniu do problemów wymiany ciepła jest ona zależna od temperatury i

tzw. ciepła właściwego (pojemności cieplnej) układu. Dla gazów idealnych  $\varepsilon = c_v T$ , gdzie  $c_v$  oznacza ciepło właściwe w stałej objętości, a T jest temperaturą absolutną.

Iloczyn skalarny  $\mathbf{t}_n \cdot \mathbf{v}$ , który przy pomocy tensora naprężenia można napisać w postaci

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Tn} = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} v_i n_j$$
 określa gęstość mocy sił powierzchniowych na jednostkę powierzchni

w punkcie  $\mathbf{x}$  powierzchni  $\partial \mathcal{B}$  i w chwili czasu t. Jej jednostką jest  $\frac{N}{ms}$ . q jest  $gęstością strumienia ciepła przez jednostkę powierzchni w punkcie <math>\mathbf{x}$  powierzchni  $\partial \mathcal{B}$  i w chwili czasu t. Jej jednostką jest również  $\frac{N}{ms}$ . Podobnie jak w przypadku tensora naprężeń można udowodnić, że q jest liniową funkcją wektora normalnego, tzn.

$$q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^{3} q_i n_i. \tag{92}$$

q jest nazywane wektorem strumienia ciepła.

Oczywiście,  $\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$  jest gęstością mocy sił objętościowych. Wreszcie r oznacza gęstość promieniowania objętościowego lub gęstość źródeł ciepła. W przeciwieństwie do promieniowania powierzchniowego promieniowanie objętościowe jest pomijalne w zastosowaniach w budownictwie. Natomiast źródła ciepła pojawiają się w takich problemach przewodnictwa cieplnego, jak podziemne wybuchy jądrowe, ochrona reaktorów atomowych, itp. Dalej pomijamy r w równaniach.

Dodajmy, że zasada zachowania energii jest również często nazywana pierwszą zasadą termodynamiki.

Tabela 8: Lokalne zasady zachowania (93)

w zapisie absolutnym	w układzie kartezjańskim
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \mathbf{v}\right) = 0,$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0,  \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i,$
$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}\right) = \rho \mathbf{b},$	$\frac{\partial \rho \mathbf{v}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial (\rho v_i v_j - T_{ij})}{\partial x_j} = \rho b_i,$
$ \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) +  + \operatorname{div} \left( \left( \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \mathbf{v} + \mathbf{q} - \mathbf{T} \mathbf{v} \right) =  = \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}, $	$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \varepsilon + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \rho v_i v_i \right) + $ $+ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \left( \rho \varepsilon + \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2} \rho v_j v_j \right) v_i \right) + $ $+ \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( q_i - \sum_{j=1}^{3} T_{ij} v_j \right) = \sum_{i=1}^{3} \rho b_i v_i.$

Powyższe globalne zasady zachowania można przekształcić do postaci lokalnej. Równania takie muszą zachodzi w prawie każdym punkcie układu (tzn. poza wyjątkowymi tzw. punktami osobliwymi). Pominiemy szczegóły matematyczne przejścia od postaci globalnej do lokalnej i podamy wynik końcowy. Jest on przedstawiony w zestawieniu wzorów (93)  $(r \equiv 0!)$  w postaci absolutnej i we współrzednych kartezjańskich.

Łatwo dostrzec, że równania te mają podobną postać: zawierają one pochodną czasową, przestrzenne pochodne cząstkowe, które kombinują się w operator nazywany dywergencją i wkłady oddziaływań zewnętrznych, które w powyższej formie zostały zredukowane do sił masowych b. Taka postać zasad zachowania nazywa się dywergentną i jest ona charakterystyczna dla wszystkich zasad zachowania w fizyce. Ma ona istotne znaczenie dla matematycznej analizy modeli, której nie będziemy tu przedstawiali.

Wkłady do dywergentnej części równań zawierają dwa typy wyrażeń: część konwektywną (ang. convection, konwekcja=unoszenie), w której pojawia się prędkość ruchu v

$$\rho \mathbf{v}, \quad \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}, \quad \rho \left(\varepsilon + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) \mathbf{v} - \mathbf{T} \mathbf{v},$$
 (94)

oraz część nie zawierającą prędkości, która w przypaku ciepła jest związana z przewodnictwem ciepła (ang. conduction)

$$0, \quad -\mathbf{T}, \quad \mathbf{q}. \tag{95}$$

Do szczegółowej dyskusji tych wyrażeń przejdziemy w dalszej części tych notatek.

## 3.3 Wymiana ciepła przez przewodnictwo

W wielu zagadnieniach o praktycznym znaczeniu inżynierskim rozpatruje się tzw. zagadnienia stacjonarne przewodnictwa, w których pochodne czasowe znikają identycznie. Dodatkowo zakłada się często, że prędkości ruchu są tak małe, że można pominąć wkłady, zawierające wyższe potęgi prędkości. Uwzględniając te uproszczenia otrzymujemy zasadę zachowania masy w postaci div  $(\rho \mathbf{v}) = 0$ . Równanie to określa zmiany gęstości masy przy zadanej prędkości  $\mathbf{v}$  i nie będzie ono nas dalej interesowało. Zasada zachowania pędu staje się warunkiem równowagi mechanicznej div  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ , który jest przedmiotem analizy w wytrzymałości materiałów i mechanice budowli. Tego problemu również nie będziemy analizowali w tych notatkach. Pozostaje uproszczona zasada zachowania energii o postaci

$$\operatorname{div}\left(\rho\varepsilon\mathbf{v} + \mathbf{q} - \mathbf{T}\mathbf{v}\right) = \rho\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}.\tag{96}$$

W przypadku, gdy równanie to jest stosowane do gazu, na przykład powietrza, poruszającego się w pomieszczeniu, tensor naprężenia redukuje się do ciśnienia p

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1}, \quad \text{tzn.} \quad \sigma_{ij} = -p\delta_{ij},$$
 (97)

gdzie  $\delta_{ij}$  jest tzw. tensorem Kroneckera: jego współrzędne dla i=j są równe jeden, a pozostałe są równe zero. Mamy wtedy

$$\operatorname{div}\left(\rho\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\mathbf{v} + \mathbf{q}\right) = \rho\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}.\tag{98}$$

Wyrażenie  $\varepsilon + \frac{p}{\rho}$ określa tzw. gęstość entalpiiukładu.

Wkład konwekcji do tego równania  $\rho\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\mathbf{v}$  ma bardzo istotne znaczenie przy określaniu wymiany ciepła w pomieszczeniach. Może być jednak pominięty przy określaniu przenikania ciepła przez przegrody, gdzie dominującą rolę odgrywa przewodnictwo,

gdyż w przegrodach  $\mathbf{v} \approx \mathbf{0}$ . Z tych samych powodów można również pominąć wkład sił masowych. Mamy wtedy

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0. \tag{99}$$

Dla przegród płaskich, w których wymiana ciepła odbywa się w kierunku prostopadłym do przegrody, powiedzmy, że jest to kierunek osi x, mamy wtedy

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = 0,\tag{100}$$

a więc przypływ ciepła jest stały w tym kierunku.

Przepływ ciepła przez konwekcję może być wymuszony przez ruch powietrza, spowodowany przez takie urządzenia, jak wentylatory. Natomiast przepływy ciepła przez przewodnictwo są związane z różnicami temperatury. Ten rodzaj wymiany ciepła jest opisywany przez tzw. prawo Fouriera, które dla materiałów termicznie izotropowych (tzn o własnościach termicznych, niezależnych od kierunku) ma postać<sup>4</sup>

$$\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T. \tag{101}$$

W równaniu tym operator grad określa wektor gradientu temperatury, którego postać we współrzędnych kartezjańskich jest następująca

$$\operatorname{grad} T = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial T}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}. \tag{102}$$

Stała  $\lambda > 0$  jest tzw. współczynnikiem przewodnictwa cieplnego i jest ona różna dla różnych materiałów. W Tabeli**9.**cytujemy kilka przykładów jej wartości.

Dla materiałów niejednorodnych współczynnik ten jest funkcją  $\mathbf{x}$ , a dla materiałów

anizotropowych staje się macierzą: 
$$q_i = -\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$
.

Dla przegród prawo to redukuje się do jednego wymiaru i ma postać

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. (103)$$

Ponieważ problem jest w tym przypadku jednowymiarowy pochodną cząstkową można zastąpić przez zwyczajną. Dodatkowo, w rozważanym przypadku otrzymaliśmy z zasady zachowania energii, że  $q_x$  jest stałe (wzór (100)). Tym samym powyższe równanie można natychmiast scałkować. Otrzymujemy

$$q_x = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{D}, \quad T = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{x}{D},$$
 (104)

gdzie D jest grubością przegrody, a  $T_1, T_2$  oznaczają temperatury na brzegach przegrody. Określają one kierunek przepływu ciepła, który, zgodnie z drugim prawem termodynamiki, musi zachodzić od obszaru cieplejszego do zimniejszego. Rozkład temperatury w przegrodzie jest liniowy.

 $<sup>^4</sup>$ oznaczenie współczynnika przewodnictwa (przewodzenia) ciepła  $\lambda$  jest stosowane w normach budowlanych (por. np. EN ISO 7345: 1995). W teorii przewodnictwa cieplnego i termodynamice stosuje się również oznaczenia  $\kappa$  lub K.

**Tabela 9:** Wspłczynnik przewodnictwa cieplnego  $\lambda$  ( $T \sim 20^{\circ}$ C)

	W/mK	kcal/mhK
aluminium	220	189
bazalt	1,6	1,4
beton	1	0.86
cegła szamotowa	1	0,86
drewno (suche)	0,1-0,2	0,09-0,18
granit	2,1-2,9	1,8-2,5
guma	0,15	0,13
$lód (0^0C)$	2,2	1,9
piaskowiec	1,6-2,1	1,4-1,8
porcelana	1	0,86
powietrze	0,026	0,022
szkło kwarzowe	1,36	1,17
skała wapienna	2,2	1,9
woda	0,598	0,514
wełna azbestowa	0,156	0,134
wełna szklana	1,36	1,17
żelazo	74	64

**Tabela 10:** Zestaw wybranych pojęć dla ustalonego jednowymiarowego przepływu ciepła przez przewodnictwo; wg. Normy EN ISO 7345:1995

(Q - ilość ciepła przez powierzchnię A w czasie t)

(& nese ciepia przez pov	vicizeiiiię ii w czasie ej	
strumień ciepła	$\phi\left(=\dot{Q}\right) = dQ/dt$	[W]
(powierzcniowa) gęstość strumienia ciepła	$q = d\phi/dA$	$[W/m^2]$
liniowa gęstość strumienia ciepła	$q_l = d\phi/dl, l$ – długość	[W/m]
współczynnik przewodnictwa (przewodzenia) ciepła	$\lambda$ , $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ ,	$[W/m \cdot K]$
opór cieplny właściwy	$r = 1/\lambda$	[m·K/W]
współczynnik przenikania ciepła	$U = \phi/\left(T_1 - T_2\right)A$	$[W/m^2 \cdot K]$
opór cieplny warstwy płaskiej	$R = d/\lambda$ , d – grubość warstwy	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K/W}]$
opór cieplny (ogólnie)	$R = \left(T_1 - T_2\right)/q$	$[\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K/W}]$
liniowy opór cieplny	$R_l = \left(T_1 - T_2\right)/q_l$	[m·K/W]

# 3.4 Równanie przewodnictwa cieplnego

Omówione powyżej związki pozwalają wyprowadzić jedno z najbardziej znanych równań fizyki matematycznej – równanie przewodnictwa cieplnego. Równanie to opisuje rozkład temperatury w ciele  $\mathcal B$  przy założeniu, że można pominąć efekty mechaniczne, a więc deformację i ruch ośrodka. Podstawienie prawa Fouriera do zasady zachowania energii daje wtedy

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_v} \nabla^2 T, \quad c_v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}, \tag{105}$$

gdzie  $c_v$  jest, jak poprzednio, ciepłem właściwym przy stałej objętości (jednostka J/kg·K), a

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
jest tzw. operatorem Laplace'a.

Do rozwiązania tego równania potrzebny jest warunek początkowy, na przykład zadany rozkład temperatury  $T(\mathbf{x}.t=0)$  w chwili początkowej i warunek brzegowy. Na części brzegu  $\partial \mathcal{B}_T$  może być zadana temperatura, a na części  $\partial \mathcal{B}_q = \partial \mathcal{B} \backslash \partial \mathcal{B}_T$  – pochodna temperatury w kierunku prostopadłym do brzegu, tzn. w kierunku wektora  $\mathbf{n}$ , gdyż na skutek prawa Fouriera oznacza to, że zadajemy tam strumień ciepła  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ 

$$\begin{cases}
T = T_0(\mathbf{x}, \mathbf{t}) & \text{dla } \mathbf{x} \text{ należącego do } \partial \mathcal{B}_T, \\
\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} T = -\frac{1}{\lambda} q_0(\mathbf{x}, t) & \text{dla } \mathbf{x} \text{ należącego do } \partial \mathcal{B}_q,
\end{cases}$$
(106)

gdzie  $T_0$  i  $q_0$  są zadanymi funkcjami. Takie postawienie zagadnienia brzegowego jest zgodne z warunkami fizycznymi. Drugie prawo termodynamiki wymaga, aby temperatura była ciągła na brzegu, a więc jej zadanie na zewnątrz brzegu oznacza, że temperatura układu (po wewnętrznej stronie brzegu) przy brzegu będzie taka sama. Jednocześnie globalna (całkowa) zasada zachowania energii prowadzi nie tylko do równania lokalnego, które dyskutowaliśmy poprzednio, ale również do ciągłości strumienia ciepła w kierunku prostopadłym do brzegu. To pozwala sformułować drugi warunek brzegowy.

Powyższe warunki brzegowe są przypadkami szczególnymi następującego ogólnego warunku brzegowego III-go rodzaju

$$-\lambda \left(\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} T\right) = \alpha \left(T - T_0\right),\tag{107}$$

gdzie  $\alpha$  (jednostka W/m²·K) jest tzw.  $współczynnikiem przejmowania ciepła. Dla <math>\alpha \rightarrow \infty$  warunek ten redukuje się do warunku (106)<sub>1</sub>, nazywanym warunkiem I-go rodzaju, a dla  $\alpha = 0$  – do warunku (106)<sub>2</sub> gdy  $q_0 = 0$ . Jak zobaczymy dalej, współczynnik  $\alpha$  jest dla przegród budowlanych mały i dlatego warunkek I-go rodzaju nie może być zwykle stosowany. W przypadku warunku II-go rodzaju wymagane jest, by zadany był strumień  $q_0$ . W konstrukcjach budowlanych również ten warunek zwykle nie występuje, co jest wynikiem konwekcji. Przejmowanie ciepła przez konwekcję zależy od warunków w bezpośrednim otoczeniu przegrody i od odbicia promieniowania od powierzchni, które z kolei jest zależne od temperatury. Problemami promieniowania i konwekcji zajmujemy się dalej.

Aby warunek (107) mógł być stosowany w obecności promieniowania i konwekcji wprowadza się (Mackey, Wright) zastępczą temperaturę zewnętrzną  $T_0$ , tzw. stoneczną temperaturę powietrza oznaczaną  $T_s$ . Jest ona określona związkiem

$$T_s = T_e + \varepsilon \frac{I_c}{\alpha_e},\tag{108}$$

gdzie  $T_e$  jest zewnętrzną temepraturą powietrza,  $I_c$  jest całkowitym natęrzeniem promieniowania słonecznego,  $\varepsilon$  jest współczynnikiem absorpcji promieniowania, a  $\alpha_e$  – współczynnikiem przejmowania ciepła na zewnętrznej powierzchni przegrody. Częścią tego ostatniego współczynnika jest współczynnik przejmowania ciepła przez konwekcję  $\alpha_k$ .

Obok powyższych warunków brzegowych pojawiają się również warunki kontaktu między dwoma ośrodfkami przewodzącymi ciepło. Sprowadzają sięone do warunków ciągłości temperatury i strumienia ciepła na powierzchni kontaktu

$$T^{-}(\mathbf{x},t) = T^{+}(\mathbf{x},t), \quad (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} T)^{-}(\mathbf{x},t) = (\mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} T)^{+}(\mathbf{x},t),$$
 (109)

gdzie znaki " – ", " + " odnoszą się do granic po obu stronach powierzchni kontaktowej.

Dla ilustracji problemu przewodnictwa ciepła rozpatrzmy prosty przypadek pręta nieskończonego o przekroju jednostkowym, obciążonego impulsem cieplnym w chwili t=0 w punkcie x=0. Równanie przewodnictwa cieplnego ma w tym przypadku formę

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad K = \frac{\lambda}{\rho c_v},$$
 (110)

a warunki początkowe i brzegowe ze względu na symetrię można napisać w postaci

$$T(x,t=0) = \frac{Q}{2}\delta(x)$$
(111)

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x=0,t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(x \to \infty, t) = 0.$$
 (112)

W warunku początkowym Q jest intensywnością impulsu, a  $\delta\left(x\right)$  jest tzw. funkcją Diraca, która jest różna od zera tylko w punkcie x=0. Warunki brzegowe oznaczają, że strumień ciepła jest symetryczny względem punktu x=0, i że znika on nieskończenie daleko od impulsu.

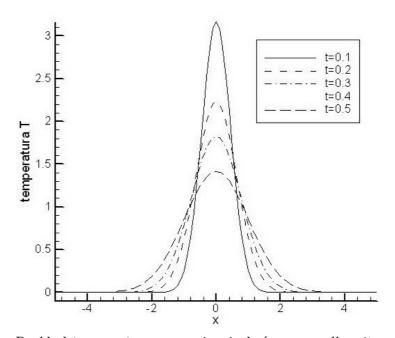
Ten klasyczny przykład można rozwiązać analitycznie, na przykład wykorzystując tzw. metodę podobieństwa. Wynik jest następujący

$$T = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Kt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Kt}\right). \tag{113}$$

Ten rozkład jest przedstawiony dla różnych czasów na Rys. 3. Wprowadzono następujące zmienne bezwymiarowe

$$\frac{x}{\sqrt{K\tau}}, \frac{t}{\tau}, \frac{T}{Q}\sqrt{K\tau},\tag{114}$$

gdzie  $\tau$  jest dowolnie wybraną jednostką czasu.



Rys. 3: Rozkład temperatury w pręcie nieskończonym dla różnych czasów

Powyższy rozkład ma dwie cechy charakterystyczne. Po pierwsze temperatura maleje w czasie w okolicy punktu x=0, by w granicy  $t\to\infty$  osiągnąć wszędzie wartość równą zero. Po drugie, natychmiast po przyłożeniu impulsu pojawia się zmiana temperatury w całym pręcie. W punktach bardzo odległych od x=0 zmiany te są bardzo małe, ale różne od zera. Oznacza to, że prędkość propagacji impulsu jest nieskończona. Jest to cecha wynikająca z tzw. paraboliczności równania przewodnictwa cieplnego. Z technicznego punktu widzenia nie ma to na ogół większego znaczenia i jest praktycznie akceptowalne. Jednakże z fizycznego punktu widzenia cecha ta jest niepokojąca i istnieją próby poprawienia równania przewodnictwa, by ją usunąć.

Analizy rozwiązań ogólnego równania przewodnictwa nie będziemy dyskutować w tych notatkach i zainteresowanego czytelnika odsyłamy do bardzo obszernej literatury.

## 3.5 Metoda rozdzielania zmiennych (metoda Fouriera)

Do rozwiązywania równania przewodnictwa cieplnego

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \nabla^2 T, \quad K = \frac{\lambda}{\rho c_v}.$$
 (115)

stosuje się często metodę *rozdzielania zmiennych*. Prowadzi ona do przedstawienia rozwązania w postaci szregu Fouriera. Rozpatrzmy ten problem najpierw we współrzędnych kartezjańskich. Zakładamy, że rozwiązanie można przedstawić w postaci

$$T(x, y, z, t) = X(x) Y(y) Z(z) \eta(t).$$

$$(116)$$

Podstawienie do równania (115), a następnie podzielenie przez XYZ prowadzi do związku

$$K\left(\frac{1}{X}\frac{d^{2}X}{dx^{2}} + \frac{1}{Y}\frac{d^{2}Y}{dy^{2}} + \frac{1}{Z}\frac{d^{2}Z}{dz^{2}}\right) = \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt},$$
(117)

w którym każdy wyraz jest funkcją jednej zmiennej. Oznacza to, że wyrazy te muszą być stałe

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k_{xn}^2, \quad \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k_{yn}^2, \quad \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k_{zn}^2, \quad \frac{1}{\eta}\frac{d\eta}{dt} = -\tau_n, 
K\left(k_{xn}^2 + k_{yn}^2 + k_{zn}^2\right) = \tau_n.$$
(118)

Stałe zostały wyposażone w indeks n, gdyż ich superpozycja jest również rozwiązaniem równania (115) ze względu na jego liniowość.

Rozwiązania równań (118) mają następującą postać ogólną

$$X = A_n \cos k_{xn} x + B_n \sin k_{xn} x,$$

$$Y = C_n \cos k_{yn} y + D_n \sin k_{yn} y,$$

$$Z = E_n \cos k_{zn} z + F_n \sin k_{zn} z,$$

$$\eta = G_n \exp(-\tau_n t).$$
(119)

Ostatni z powyższych związków wyjaśnia wybór znaków stałych we wzorach (118). Na podstawie drugiej zasady termodynamiki K > 0 i, tym samym,  $\tau_n > 0$ . Oznacza to, że rozwiązania relaksują w czasie. W przeciwnym razie temperatura musiałaby rosnąć nieograniczenie w granicy  $t \to \infty$ .

Biorąc pod uwagę wzór (116) otrzymujemy przez superpozycję następujące rozwiązanie ogólne problemu

$$T(x, y, z, t) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\tau_n t) \left[ A_n \cos k_{xn} x + B_n \sin k_{xn} x \right] \times$$

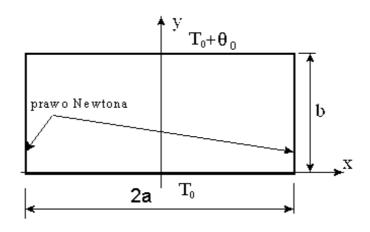
$$\times \left[ C_n \cos k_{yn} y + D_n \sin k_{yn} y \right] \left[ E_n \cos k_{zn} z + F_n \sin k_{zn} z \right].$$
(120)

We wzorze tym przyjęto  $G_n=1$ , gdyż stałe te można włączyć do pozostałych stałych rozwiązania.

Nie będziemy się dalej zajmowali ogólnymi własnościami tego szeregu, jak na przykład problemem jego zbieżności. Na przykładach pokażemy jednak pewne jego osobliwości.

#### **3.5.1** Przykład 1

Należy znaleźć rozkład temperatury niezależny od czasu w belce nieskończonej o przekroju prostokątnym, przedstawionym na Rys. 4.



Rys. 4: Warunki brzegowe

Rozwiązanie równania przewodnictwa

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0, \quad \vartheta = T - T_0, \tag{121}$$

powinno spełniać następujące warunki brzegowe

$$\vartheta(x, y = 0) = 0, \quad \vartheta(x, y = b) = \vartheta_0, 
\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(x = 0, y) = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(x = a, y) = -\frac{\alpha}{\lambda}\vartheta(x = a, y),$$
(122)

gdzie trzeci warunek wynika z symetrii problemu (warunki Newtona są symetryczne względem osi y, tzn. intensywność wymiany ciepła na brzegach  $x=\pm a$  jest taka sama).  $\alpha$  oznacza współczynnik przejmowania ciepła.

Stosując metodę rozdzielania zmiennych napiszemy rozwiązanie w postaci

$$\vartheta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \operatorname{ch} k_n y + B_n \operatorname{sh} k_n y \right] \left[ C_n \cos k_n x + D_n \sin k_n x \right]. \tag{123}$$

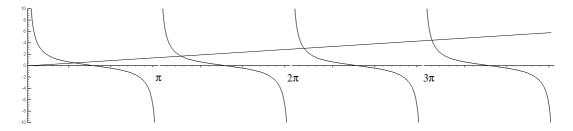
Biorąc pod uwagę warunki brzegowe  $(122)_{1,3}$  otrzymujemy  $A_n = D_n = 0$ . Rozwiązanie można więc napisać w postaci

$$\vartheta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \operatorname{sh} k_n y \cos k_n x, \quad E_n = B_n C_n.$$
 (124)

Podstawienie tego rozwiązania do warunku (122)<sub>4</sub> prowadzi do związku

$$\operatorname{ctg} \gamma_n = \frac{\lambda \gamma_n}{\alpha a}, \quad \gamma_n = k_n a. \tag{125}$$

Rozwiązania tego równania transcendentalnego są schematycznie pokazane na Rys. 5 poniżej. Są to punkty przecięcia prostej o nachyleniu  $\lambda/\alpha a$  z wykresem funkcji cotangens.



Rys. 5: Miejsca zerowe równania (125).

Do wykorzystania pozostaje warunek brzegowy (122)<sub>2</sub>, z którego otrzymujemy

$$\vartheta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \gamma_n \frac{b}{a} \cos \gamma_n \frac{x}{a}.$$
 (126)

Z tego związku można wyznaczyć stałe  $E_n$  pod warunkiem, że ciąg funkcji  $\left\{\cos \gamma_n \frac{x}{a}\right\}$  jest ortogonalny w przedziale [-a,a], a szereg jest jednostajnie zbierzny. Dwie funkcje  $p\left(x\right), q\left(x\right)$  nazywamy ortogonalnymi w przedziale  $[x_1, x_2]$  jeśli

$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) q(x) dx = 0.$$
 (127)

W przypadku powyższego ciągu mamy

$$\int_{-a}^{a} \cos \gamma_{n} \frac{x}{a} \cos \gamma_{m} \frac{x}{a} dx = \frac{a}{\gamma_{n}} \sin \gamma_{n} \frac{x}{a} \cos \gamma_{m} \frac{x}{a} \Big|_{-a}^{a} + \frac{\gamma_{m}}{\gamma_{n}} \int_{-a}^{a} \sin \gamma_{n} \frac{x}{a} \sin \gamma_{m} \frac{x}{a} dx =$$

$$= \frac{2a}{\gamma_{n}} \sin \gamma_{n} \cos \gamma_{m} + \frac{\gamma_{m}}{\gamma_{n}} \left[ -\frac{a}{\gamma_{n}} \cos \gamma_{n} \frac{x}{a} \sin \gamma_{m} \frac{x}{a} \Big|_{-a}^{a} + \frac{\gamma_{m}}{\gamma_{n}} \int_{-a}^{a} \cos \gamma_{n} \frac{x}{a} \cos \gamma_{m} \frac{x}{a} dx \right] =$$

$$= \left(1 - \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_n}\right)^2\right)^{-1} \frac{2a}{\gamma_n} \sin \gamma_n \sin \gamma_m \left[\operatorname{ctg} \gamma_m - \frac{\gamma_m}{\gamma_n} \operatorname{ctg} \gamma_n\right] = 0, \quad m \neq n.$$
 (128)

A więc ciąg ten jest rzeczywiście ortogonalny.

Jeśli teraz pomnożymy obie strony relacji (126) przez  $\cos \gamma_m \frac{x}{a}$  i wycałkujemy w przedziale [-a,a], to otrzymamy

$$\vartheta_0 \int_{-a}^a \cos \gamma_m \frac{x}{a} dx = E_m \sinh \gamma_m \frac{b}{a} \int_{-a}^a \cos^2 \gamma_m \frac{x}{a} dx, \tag{129}$$

pod warunkiem, że szereg jest jednostajnie zbieżny, co umożliwia całkowanie wyraz po wyrazie. Wynik całkowania w powyższym wzorze jest następujący

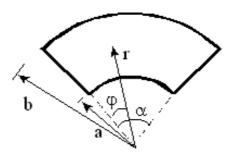
$$E_m = \frac{1}{\sinh \gamma_m \frac{b}{a}} \frac{2\vartheta_0 \sin \gamma_m}{\gamma_m + \sin \gamma_m \cos \gamma_m}.$$
 (130)

Rozwiązanie problemu ma więc postać

$$\vartheta(x,y) = 2\vartheta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \gamma_n}{\gamma_n + \sin \gamma_n \cos \gamma_n} \frac{\sinh \gamma_n \frac{x}{a}}{\sinh \gamma_n \frac{b}{a}} \cos \gamma_n \frac{x}{a}.$$
 (131)

#### 3.5.2 Przykład 2

Rozpatrzmy problem stacjonarnego rozkładu temperatury w wycinku nieskończonego walca przedstawionym na Rys. 6. W układzie współrzędnych biegunowych równanie przewodnictwa cieplnego ma postać



Rys. 6: Geometria przykładu

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{132}$$

gdzie  $\vartheta = T - T_0$  jest temperaturą względną.

Warunki brzegowe przyjmujemy w następującej postaci

$$\vartheta(a,\varphi) = 0, \quad 0 \le \varphi \le \alpha, 
\vartheta(r,0) = \vartheta(r,\alpha) = 0, \quad a \le r \le b, 
\vartheta(b,\varphi) = \vartheta_0, \quad 0 \le \varphi \le \alpha,$$
(133)

tzn. zarówno na brzegach prostoliniowych, jak i na brzegu dolnym utrzymywana jest temperatura otoczenia, a górny brzeg jest podgrzany do temperatury  $T_0 + \vartheta_0$ .

Poszukujemy rozwiązania w postaci szeregu nieskończonego

$$\vartheta\left(r,\varphi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n\left(r,\varphi\right),\tag{134}$$

i stosujemy metodę rozdzielania zmiennych

$$\vartheta_{n}(r,\varphi) = R_{n}(r) \Phi_{n}(\varphi). \tag{135}$$

Podstawienie do (132) prowadzi do dwóch równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{d^2\Phi_n}{d\varphi^2} + k_n^2\Phi_n = 0, \quad r^2\frac{d^2R_n}{dr^2} + r\frac{dR_n}{dr} - k_n^2R_n = 0.$$
 (136)

Ich rozwiązania ogólne mają postać

$$\Phi_n = A_n \cos k_n \varphi + B_n \sin k_n \varphi, \quad R_n = C_n r^{k_n} + D_n r^{-k_n}. \tag{137}$$

Wykorzystując warunki brzegowe (133)<sub>2</sub> otrzymujemy natychmiast

$$A_n = 0, \quad \sin k_n \alpha = 0 \quad \Longrightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{\alpha}.$$
 (138)

Warunek  $(133)_1$  prowadzi do związku

$$C_n a^{k_n} + D_n a^{-k_n} = 0$$
, tzn.  $R_n = C_n a^{k_n} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^{k_n} - \left( \frac{a}{r} \right)^{k_n} \right]$ . (139)

Ostatecznie rozwiązanie może być napisane w postaci

$$\vartheta(r,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n a^{k_n} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^{k_n} - \left( \frac{a}{r} \right)^{k_n} \right] \sin k_n \varphi, \quad E_n = B_n C_n.$$
 (140)

Ostatni warunek brzegowy (133)<sub>3</sub> daje wtedy

$$\vartheta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} E_n a^{k_n} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^{k_n} - \left( \frac{a}{b} \right)^{k_n} \right] \sin k_n \varphi. \tag{141}$$

Aby wyznaczyć stałe  $E_n$  wykorzystujemy ortogonalność ciągu  $\left\{\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}\right\}$  w przedziale  $[0,\alpha]$ . Mnożąc powyższy związek przez  $\sin\frac{m\pi\varphi}{\alpha}$  i całkując wyraz po wyrazie (założenie o jednostajnej zbieżności!) otrzymujemy

$$E_n a^{k_n} \left[ \left( \frac{b}{a} \right)^{k_n} - \left( \frac{a}{b} \right)^{k_n} \right] = \frac{\vartheta_0 \int_0^\alpha \sin k_n \varphi d\varphi}{\int_0^\alpha \sin^2 k_n \varphi d\varphi} = \frac{2\vartheta_0}{n\pi} \left[ 1 - (-1)^n \right]. \tag{142}$$

Rozwiązanie problemu ma więc następującą ostateczną postać

$$\vartheta\left(r,\varphi\right) = \frac{4\vartheta_0}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{2n+1}{\alpha}\pi} - \left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2n+1}{\alpha}\pi}}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2n+1}{\alpha}\pi} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2n+1}{\alpha}\pi}} \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{\alpha}\pi\varphi\right)}{2n+1}.$$
 (143)

Łatwo sprawdzić sumując dla wybranych wartości  $r, \varphi$  wyrazy tego szeregu, że jest on dosyć szybko zbieżny. Tej własności nie mają już, niestety, pierwsze pochodne temperatury względem r i  $\varphi$ , które określają składowe strumienia ciepła w kierunku promieniowym i obwodowym. Wynika to z faktu pojawienia się w każdym wyrazie mnożnika 2n+1, który upraszcza się z mianownikiem, a to psuje zbieżność.

#### 3.5.3 Przykład 3

Rozwiążemy zadanie z Przykładu 1 przy założeniu, że przekrój pęta jest prostokątem z pierwszej ćwiartki Rys. 4 o wymiarach  $a \times b$ , a na powierzchni górnej zadany jest strumień ciepła  $q_s$ . Musimy spełnić równanie (121) z warunkami brzegowymi

$$y = b: \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\lambda \frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{y=b} = q_s,$$

$$y = 0: \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{y=0} = \alpha\vartheta,$$

$$x = 0: \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \lambda \frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{x=0} = \alpha\vartheta,$$

$$x = a: \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\lambda \frac{d\vartheta}{dy} \Big|_{x=0} = \alpha\vartheta.$$

$$(144)$$

Metodą rozdzielania zmiennych dochodzimy do ogólnej postaci rozwiązania

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cosh k_n y + B_n \sinh k_n y \right) \left( C_n \cos k_n x + D_n \sin k_n x \right). \tag{145}$$

Podstawienie do 2-go i 3-go warunku brzegowego daje

$$B_n k_n = h A_n, \quad D_n k_n = h C_n, \quad h = \frac{\alpha}{\lambda}.$$
 (146)

Wtedy 4-y warunek brzegowy prowadzi do równania dla  $k_n$ 

$$\tan \gamma_n = \frac{2ha\gamma_n}{\gamma_n^2 - h^2a^2}, \quad \gamma_n = k_n a. \tag{147}$$

Równanie to ma nieskończenie wiele rozwiązań. Pierwsze cztery są następujące

$$\gamma_1 = 3,6735, \quad \gamma_2 = 6.5846, \quad \gamma_3 = 9,6317, \quad \gamma_4 = 12,7233. \tag{148} \label{eq:148}$$

Rozwiązanie można więc napisać w postaci

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left( \cosh \gamma_n \frac{y}{a} + \frac{ha}{\gamma_n} \sinh \gamma_n \frac{y}{a} \right) \left( \cos \gamma_n \frac{x}{a} + \frac{ha}{\gamma_n} \sin \gamma_n \frac{x}{a} \right), \quad a_n = A_n C_n. \quad (149)$$

Można pokazać, że przy definicji  $\gamma_n$  związkiem (147) ciąg funkcji

$$X_n = \cos \gamma_n \frac{x}{a} + \frac{ha}{\gamma_n} \sin \gamma_n \frac{x}{a},\tag{150}$$

jest ortogonalny, tzn.

$$\int_0^a X_n X_m dx = 0 \quad \text{dla} \quad n \neq m. \tag{151}$$

Wykorzystując tą własność w 1-ym warunku brzegowym otrzymujemy

$$a_n = \frac{2q_s}{\lambda h} \frac{\gamma_n \sin \gamma_n + ah \left(1 - \cos \gamma_n\right)}{\gamma_n^2 + 2ah + a^2 h^2} \frac{1}{\frac{\gamma_n}{ah} \sinh \frac{b}{a} \gamma_n + \cosh \frac{b}{a} \gamma_n}.$$
 (152)

Otrzymany szereg jest szybko zbieżny (sprawdzić samodzielnie wykorzystując podane cztery wartości  $\gamma_n!$ ).

#### 3.5.4 Przykład 4

Rozpatrzymy teraz przypadek niestacjonarny przepływu ciepła przez nieskończoną płytę o grubości 2a. Równanie przewodnictwa można napisać w postaci

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad \vartheta = T - T_0, \quad \tau = \frac{\lambda}{\rho c_v} t,$$
 (153)

gdzie dla wygody stałą wynikającą z przewodnictwa cieplnego włączono do zmiennej czasowej.

Warunki brzegowe przyjmujemy w postaci

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{x=a} = -h\vartheta(a,\tau), \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\Big|_{x=-a} = h\vartheta(a,\tau),$$
 (154)

a warunek początkowy ma postać

$$\vartheta\left(x,0\right) = f\left(x\right),\tag{155}$$

gdzie f(x) jest zadaną funkcją. Dodatkowo przyjmujemy następujący warunek relaksacji

$$\lim_{\tau \to \infty} \vartheta\left(x, \tau\right) = 0. \tag{156}$$

Rozwiązanie przy pomocy rozdzielania zmiennych prowadzi do zależności

$$\vartheta(x,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-k_n^2 \tau} \left( A_n \cos k_n x + B_n \sin k_n x \right), \tag{157}$$

która identycznie spełnia warunek relaksacji.

Podstawienie do warunków brzegowych daje dla obu warunków taki sam związek

$$A_n (k_n \sin k_n a - h \cos k_n a) + B_n (k_n \cos k_n a + h \sin k_n a) = 0.$$
 (158)

Ponieważ konstrukcja rozwiązania wymaga istnienia obu rodzin stałych  $A_n, B_n$  (brak symetrii w problemie) ich współczynniki muszą znikać niezależnie. Otrzymujemy więc

$$\operatorname{ctg} \gamma_n^{(1)} = \frac{\gamma_n^{(1)}}{ha}, \quad \operatorname{tg} \gamma_n^{(2)} = \frac{\gamma_n^{(2)}}{ah}, \quad \gamma_n^{(1),(2)} = k_n a.$$
 (159)

Te równania mają taką samą strukturę, jak równania w obu poprzednich przykładach. Podstawienie w (157) prowadzi do rozwiązania

$$\vartheta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \exp\left[-\left(\frac{\gamma_n^{(1)}}{a}\right)^2 \tau\right] \cos \gamma_n^{(1)} \frac{x}{a} + B_n \exp\left[-\left(\frac{\gamma_n^{(2)}}{a}\right)^2 \tau\right] \sin \gamma_n^{(2)} \frac{x}{a}\right\}. \tag{160}$$

Warunek początkowy ma teraz postać

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ A_n \cos \gamma_n^{(1)} \frac{x}{a} + B_n \sin \gamma_n^{(2)} \frac{x}{a} \right].$$
 (161)

Pozwala on wyznaczyć stałe  $A_n, B_n$  jeśli powyższe ciągi są ortogonalne, tzn. spełnione są warunki

$$\int_{-a}^{a} \cos \gamma_n^{(1)} \frac{x}{a} \cos \gamma_m^{(1)} \frac{x}{a} = 0 \quad \text{for} \quad m \neq n,$$

$$\int_{-a}^{a} \cos \gamma_n^{(1)} \frac{x}{a} \sin \gamma_m^{(2)} \frac{x}{a} = 0 \quad \text{for} \quad m \neq n,$$

$$\int_{-a}^{a} \sin \gamma_n^{(2)} \frac{x}{a} \sin \gamma_m^{(2)} \frac{x}{a} = 0 \quad \text{for} \quad m \neq n,$$

$$(162)$$

oraz szereg w (161) jest jednostajnie zbieżny. Tej własności nie będziemy tu dowodzić, a dowód ortogonalności pozostawiamy czytelnikowi.

Biorąc pod uwagę powyższe własności otrzymujemy

$$A_{n} = \frac{\int_{-a}^{a} f(\xi) \cos \gamma_{n}^{(1)} \frac{\xi}{a} d\xi}{\int_{-a}^{a} \cos^{2} \gamma_{n}^{(1)} \frac{\xi}{a} d\xi} = \frac{\int_{-a}^{a} f(\xi) \cos \gamma_{n}^{(1)} \frac{\xi}{a} d\xi}{a \left(1 + \frac{\sin 2\gamma_{n}^{(1)}}{2\gamma_{n}^{(1)}}\right)},$$

$$B_{n} = \frac{\int_{-a}^{a} f(\xi) \sin \gamma_{m}^{(2)} \frac{\xi}{a} d\xi}{\int_{-a}^{a} \sin^{2} \gamma_{m}^{(2)} \frac{\xi}{a} d\xi} = \frac{\int_{-a}^{a} f(\xi) \sin \gamma_{m}^{(2)} \frac{\xi}{a} d\xi}{a \left(1 - \frac{\sin 2\gamma_{n}^{(2)}}{2\gamma_{n}^{(2)}}\right)}.$$
(163)

Rozważmy przykład numeryczny, w którym ah=2. Wtedy

$$\gamma_1^{(1)} = 1,0769, \quad \gamma_2^{(1)} = 3,6436, \quad \dots,$$

$$\gamma_1^{(2)} = 2,2889, \quad \gamma_2^{(1)} = 4,7123, \quad \dots \tag{164}$$

Jeśli wybierzemy  $f(x) = \vartheta_1 = const.$  to otrzymujemy

$$\vartheta \approx \vartheta_1 \left[ 0,8398e^{-5.2391\eta} \cos\left(2,2889\frac{x}{a}\right) - 0,4244e^{-22.2058\eta} \cos\left(4,7123\frac{x}{a}\right) + \dots \right]. \quad (165)$$

gdzie  $\eta = Kt/a^2$ . Jest oczywiste, że dla dostatecznie dużych czasów dalsze człony w tym szeregu są praktycznie równe zero.

# 4 Promieniowanie cieplne - podstawy teoretyczne

# 4.1 Opis promieniowania cieplnego

Ciało ulega ochłodzeniu na skutek emisji promieniowania cieplnego z powierzchni i ociepla się na skutek pochłaniania promieniowania przez powierzchnię. Odbicie i pochłanianie w objętości (przejście przez objętość) dają pomijalne efekty cieplne. Promieniowanie składa się z fal elektromagnetycznych o długości większej od długości fal świetlnych. Dlatego nazywa się je promieniowaniem podczerwonym. Długści fal elektromagnetycznych promieniowania cieplnego  $\lambda$  leżą w szerokim przydziale

$$10^{-6} \text{m} \le \lambda \le 10^{-4} \text{m}. \tag{166}$$

Przy absorpcji (pochłanianiu) pole elektryczne wprawia atomy lub molekuły w ruch powiększając w ten sposób ich energię kinetyczną. Makroskopowo miarą podwyższonej

mikroskopowej energii kinetycznej jest podwyższona temperatura ( $< E_{kin} > \sim kT$ , k – stała Boltzmanna, T – temperatura absolutna, < ... > - wartość średnia). Emisja powstaje na skutek wysyłania pola elektromagnetycznego przez drgające ładunki elektryczne, zwłaszcza ładunki molekularne, które spowalniają w ten sposób swoje drgania, tzn. tracą energię kinetyczną. Ciało staje się chłodniejsze.

 $Współczynnik\ absorpcji\ A$  jest definiowany jako stosunek absorbowanego do padającego na ciało promieniowania. A więc

$$A = \frac{\text{cieplo absorbowane}}{\text{cieplo padające}} \quad \Rightarrow \quad 0 \le A \le 1. \tag{167}$$

Współczynnik absorpcji jest własnością materiału i, w szczególności, zależy od własności powierzchni. Analogicznie do doświadczeń z promieniowaniem światła nazywamy ciało doskonale białym, gdy odbija ono całkowicie promieniowanie cieplne i doskonale czarnym, gdy całe promieniowanie cieplne jest absorbowane. Wartość współczynnika absorpcji jest wtedy, odpowiednio, 0 lub 1.

Emitowane promieniowanie cieplne jest dla danej temperatury również własnością materiałową. Współczynnik emisji  $\varepsilon$  jest zdefiniowany jako stosunek emitowanego promieniowania do promieniowania, jakie emitowałoby ciało doskonale czarne w tej samej temperaturze. Współczynnik ten jest stabelaryzowany dla różnych materiałów i, przykładowo, posiada wartości

polerowany nikiel 0,057, oksydowana miedź 0,825, drewno 0,91.

Gdy ciała znajdują się w kontakcie przez promieniowanie ich temperatura ulega wyrównaniu. W stanie równowagi ciało wypromieniowuje (emituje) tyle samo energii ile pobiera przez absorpcję. Obowiązuje wtedy prawo Kirchhoffa dla równowagi promieniowania

$$\varepsilon = A.$$
 (168)

Dowód opiera się na prostym rachunku:

$$\varepsilon = \frac{\text{emitowane promieniowanie}}{\text{promieniowanie emitowane przez ciało doskonale czarne}} = \frac{\frac{\text{emitowane promieniowanie}}{\text{padające promieniowanie}}}{\frac{\text{promieniowanie emitowane przez ciało doskonale czarne}}{\text{padające promieniowanie}}},$$

$$(169)$$

a w stanie równowagi

$$\varepsilon = \frac{\frac{\text{absobowane promieniowanie}}{\text{padające promieniowanie}}}{\frac{\text{promieniowanie absobowane przez ciało doskonale czarne}}{\text{padające promieniowanie}}} = \frac{A}{A_s} = A, \tag{170}$$

ponieważ  $A_s = 1$ . Indeks s oznacza ciało doskonale czarne.

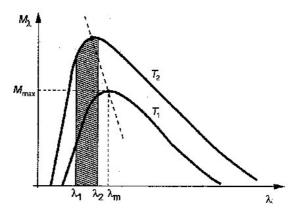
Ciała na ogół reagują różnie na promieniowanie o różnych częstotliwościach. Ponownie, przez analogię do światła, nazywamy ciało

kolorowym, gdy promieniowanie o różnej częstotliwości absorbuje ciepło z różną intensywnością, szarym, jeśli absorpcja jest niezależna od częstotliwości.

Na Rys. 7 pokazano zależność emisji od częstotliwości dla ciała doskonale czarnego, które jest przypadkiem szczególnym ciała kolorowego.

Prawo Kirchhoffa jest spełnione dla ciał kolorowych niezależnie dla każdej częstotliwości. Jeśli podawana jest dla tych ciał jedna wartość współczynnika emisji, jak w przykładzie powyżej, to jest ona wartością średnią.

Także poza zakresem promieniowania podczerwonego może promieniowanie wywołać efekty cieplne, czego przykładem są kuchenki mikrofalowe. W takich kuchenkach długość fali wynosi ok. 12 cm. Te fale wywołują drgania rotacyjne molekuł wody. Przyrost energii kinetycznej wywołuje jednorodne ogrzewanie produktu. Naczynie porcelanowe nie jest nagrzewane bezpośrednio przez promieniowanie, gdyż nie zawiera wody, może jednak zmienić temperaturę na skutek przewodnictwa cieplnego. Metale odbijają promieniowanie mikrofalowe.



Rys. 7: Rozkład widmowy promieniowania wyemitowanego przez ciało doskonale czarne opisany równaniem Plancka;  $M_{\lambda} = \frac{2hc^2}{\lambda^2} \left[ \exp \frac{hc}{\lambda kT} - 1 \right]^{-1} M_{\lambda} - \text{egzytancja}.$ 

## 4.2 Prawo Stefana-Boltzmanna

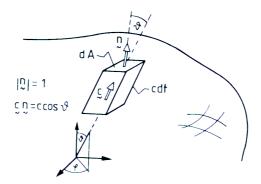
Tak, jak to się robi w optyce geometrycznej, promieniowanie można formalnie rozłożyć na promienie, które leżą, na przykład, w kierunkach przestrzennych pomiędzy kątami  $(\vartheta, \varphi)$  i  $(\vartheta + d\vartheta, \varphi + d\varphi)$   $(0 \le \vartheta \le \pi, \ 0 \le \varphi \le 2\pi;$  patrz Rys. 8). Gęstość energii promienia i całkowita energia są wtedy określone zależnościami

$$\epsilon (\vartheta, \varphi) \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{4\pi}, \int_{0}^{\pi} \int_{0}^{2\pi} \epsilon (\vartheta, \varphi) \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{4\pi} = \epsilon.$$
 (171)

Promieniowanie rozprzestrzenia sie z prędkością światła c i, z tego powodu, element powierzchni dA w czasie dt przepuszcza energię promieniowania JdAdt w następującej ilości (porównaj Rys. 8)

$$JdAdt = \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{2\pi} cdt dA \epsilon \left(\vartheta, \varphi\right) \frac{\sin \vartheta d\vartheta d\varphi}{4\pi}, \ c = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n} = c_k n_k.$$
 (172)

J jest nazywane gęstością strumienia energii promieniowania.



**Rys. 8:** Promieniowanie z powierzchni dA w czasie dt w kierunku  $(\vartheta, \varphi)$ .

Warunkiem koniecznym równowagi promieniowania jest niezależność energii promieniowania od kierunku:  $\epsilon(\vartheta,\varphi)=\epsilon$  (przypadkowa zbieżność oznaczeń ze współczynnikiem emisji!). Wtedy całkowanie w powyższym wzorze daje

$$J = \frac{1}{4}c\epsilon. \tag{173}$$

Jeśli promieniowanie ciała znajduje się w równowadze, to obserwuje się, że  $\epsilon$  i J są określone przez temperaturę ciała. W szczególności obowiązuje to stwierdzenie dla ciała doskonale czarnego. Jednocześnie są one niezależne od materiału, z którego jest wykonane ciało. Józef Stefan (1835-1893) stwierdził eksperymentalnie, że  $J_s$  jest proporcjonalne do  $T^4$ . Prawo to ma postać

$$J_s = 5,66 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} T^4. \tag{174}$$

Dla ciała szarego o współczynniku emisji  $\varepsilon$  mamy wtedy w stanie równowagi promieniowania

$$J = \varepsilon J_s = \varepsilon \cdot 5,66 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} T^4. \tag{175}$$

To równanie nazywa się prawem Stefana-Boltzmanna. Na drodze rozważań czysto makroskopowych (termodynamicznych) Boltzmann wyprowadził teoretycznie zależność zawierająca  $T^4$ .

#### Wyprowadzenie termodynamiczne.

Przy założeniu dla gazów idealnych, że gęstość energii wewnętrznej zależy tylko od temperatury:  $\varepsilon = \varepsilon(T)$  mamy z równania Gibbsa

$$dS = \frac{1}{T} \left( d \left( \rho_0 \varepsilon V \right) - p dV \right) = \frac{1}{T} \frac{d \left( \rho_0 \varepsilon \right)}{dT} V dT + \frac{1}{T} \left( \rho_0 \varepsilon + p \right) dV,$$

gdzie  $\rho_0$  jest stałą gęstością masy. Przyjmiemy następujący związek między energią wewnętrzną i ciśnieniem, który można uzasadnić w ramach klasycznej elektrodynamiki<sup>5</sup>:  $\rho_0 \varepsilon = 3p$ . A więc

$$dS = \frac{1}{T} \frac{d\rho_0 \varepsilon}{dT} V dT + \frac{1}{T} \frac{4}{3} \rho_0 \varepsilon dV.$$

 $<sup>^{5}</sup>$ Dla wieloatomowych gazów idealnych wzory (44), (46) prowadzą również do tego związku, ale zarówno energia, jak i ciśnienie są liniowymi funkcjami temperatury.

Warunek całkowalności ma więc postać

$$\frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{1}{T} \frac{d\varepsilon}{dT} V \right) = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{1}{T} \frac{4}{3} \varepsilon \right) \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} d\varepsilon = 4 \frac{1}{T} dT$$

$$\Rightarrow \qquad \varepsilon = CT^4, \quad C = const.$$
(176)

## 4.3 Przykład 1: temperatura słońca i planet

Najłatwiejszym do zauważenia promieniowaniem cieplnym jest promieniowanie słońca. Słońce wysyła promieniowanie z intensywnością  $3,7 \cdot 10^{26}$ W. Przy promieniu  $R_{\varnothing} = 0,7 \cdot 10^{9}$ m gęstość strumienia energii promieniowania jest wtedy

$$J_{\varnothing} = 60,08 \cdot 10^{6} \frac{W}{m^{2}},\tag{177}$$

i jeśli potraktujemy słońce jako ciało doskonale czarne w równowadze otrzymujemy temperaturę powierzchni słońca w wysokości

$$T_{\varnothing} = 5700 \text{K}. \tag{178}$$

W odległości L od słońca tylko część  $R_{\varnothing}^2/L^2$  strumienia energii na jednostkę powierzchni jest odbierana przez planety. Dla ziemi  $L_{\odot}=1.5\cdot 10^{11} \mathrm{m}$ . A więc

$$J_{\odot} = J_{\varnothing} \frac{R_{\varnothing}}{L_{\odot}} = 1330 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$
 (179)

Te dane pozwalają oszacować z grubsza temperaturę powierzchni ziemi. Z jednej strony po dziennej stronie o powierzchni  $\pi R_{\odot}^2$  otrzymuje ziemia w ciągu 24 godzin energię

$$J_{\odot} \cdot \pi R_{\odot}^2 \cdot 24h = 1,43 \cdot 10^{22} J.$$
 (180)

Jednocześnie wypromieniowuje ziemia enrgię przez całą powierzchnię  $4\pi R_{\odot}^2$  i jeśli założymy, że jest ona ciałem doskonale czarnym, to w ciągu 24 godzin wypromieniowuje ona energię

$$5,66 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} T^4 \cdot 4\pi R_{\odot}^2 \cdot 24h = 2,44 \cdot 10^{12} J \left(\frac{T}{K}\right)^4.$$
 (181)

gdzie wykorzystaliśmy wzór Stefana. Porównanie obydwu wyników (stan stacjonarny!) daje

$$T = 276K. (182)$$

Temperatura ta wydaje się zaniżona, co jest wynikiem uproszczeń, jakie zrobiliśmy w obliczeniach (np. w rzeczywistości współczynnik emisji  $\varepsilon < 1$ , część promieniowania słońca zostaje odbita).

Podobne obliczenia dla Marsa ( $L_{Mars}=2,3\cdot 10^{11}{\rm m}$ ) dają  $T=222{\rm K},$  a dla Jupitera ( $L_{Jupiter}=7,7\cdot 10^{11}{\rm m}$ )  $T=121{\rm K}.$ 

Należy dodać, że promieniowanie ziemi nie znajduje się w równowadze z promieniowaniem słońca. Zastosowanie warunku równowagi w powyższych obliczeniach oznacza jedynie, że promieniowanie słońca i ziemi znajdują się każde ze sobą samym w równowadze. Sytuacja jest podobna do wymiany ciepła między dwoma pojemnikami o różnych temperaturach, z których każdy jest w przybliżeniu w stanie równowagi, ale nie cały układ.

## 4.4 Przykład 2: wymiana ciepła między dwoma płytami

Rozpatrzymy dwie równoległe płyty o temperaturach  $T_1, T_2$  i współczynnikach emisji  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ . Wypromieniowują one energię z metra kwadratowego powierzchni i w czasie jednej sekundy w ilości

$$J_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4$$
,  $J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$ , gdzie  $\sigma = 5,66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4}$ . (183)

Jednocześnie, ponieważ płyty nie są ciałami doskonale czarnymi, odbijają one część promieniowania i wysyłają spowrotem do drugiej płyty, gdzie promieniowanie jest znów częściowo absorbowane, a częściowo odbijane. W ten sposób powstają strumienie energii od płyty pierwszej  $H_1$  i od płyty drugiej  $H_2$  w przeciwnym kierunku, których wielkość trzeba określić. Na ściance pierwszej strumien  $H_2$  jest częściowo absorbowany:  $\varepsilon_1 H_2$  (gdyż, zgodnie z prawem Kirchhoffa, współczynnik absorbcji wynosi  $A_1 = \varepsilon_1$ ) i częściowo odbity:  $(1 - \varepsilon_1) H_2$ . Podobne związki zachodzą dla drugiej ścianki. Muszą więc zachodzić zależności

$$H_1 = J_1 + (1 - \varepsilon_1) H_2, \quad H_2 = J_2 + (1 - \varepsilon_2) H_1.$$
 (184)

Stąd wynika

$$H_{1} = \frac{J_{1} + (1 - \varepsilon_{1}) J_{2}}{1 - (1 - \varepsilon_{1}) (1 - \varepsilon_{2})}, \quad H_{2} = \frac{J_{2} + (1 - \varepsilon_{2}) J_{1}}{1 - (1 - \varepsilon_{1}) (1 - \varepsilon_{2})}.$$
 (185)

Wynikający stąd przepływ ciepła  $q\equiv Q_{1\to 2}$  na jednostkę powierzchni i na jednostkę czasu ma wartość

$$q_{R} = Q_{1\to 2} = H_{1} - H_{2} = \frac{\varepsilon_{2}J_{1} - \varepsilon_{1}J_{2}}{1 - (1 - \varepsilon_{1})(1 - \varepsilon_{2})} =$$

$$= \frac{\varepsilon_{1}\varepsilon_{2}}{\varepsilon_{1} + \varepsilon_{2} - \varepsilon_{1}\varepsilon_{2}} \sigma \left(T_{1}^{4} - T_{2}^{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_{2}} + \frac{1}{\varepsilon_{1}} - 1} \sigma \left(T_{1}^{4} - T_{2}^{4}\right) =$$

$$= C_{12} \left\{ \left(\frac{T_{1}}{100}\right)^{4} - \left(\frac{T_{2}}{100}\right)^{4} \right\}, \quad C_{12} = \frac{1}{\frac{1}{C_{1}} + \frac{1}{C_{2}} - \frac{1}{C_{s}}},$$

$$(187)$$

gdzie

$$C_1 = \varepsilon_1 C_s, \quad , C_2 = \varepsilon_2 C_s, \quad C_s = 5,66 \text{ W/m}^2 \text{K}^4,$$
 (188)

oznaczają stałe promieniowania  $C_1$ ,  $C_2$  dla ciał szarych, a  $C_s$  jest stałą promieniowania ciała doskonale czarnego.  $C_{12}$  jest nazywana stałą wymiany promieniowania.

W szczególności, gdy obie płyty są doskonale czarne

$$Q_{1\to 2} = \sigma \left( T_1^4 - T_2^4 \right). \tag{189}$$

# 4.5 Porównanie promieniowania i przewodzenia ciepła

Przewodnictwo cieplne między dwoma płytami, które znajdują się od siebie w odległości D prowadzi do następującego strumienia

$$Q_{1\to 2}^C = \frac{\lambda}{D} (T_1 - T_2), \qquad (190)$$

co wynika ze scałkowania wzoru Fouriera na gęstość strumienia ciepła  $q=-\lambda \frac{dT}{dx}$ . Jednocześnie, dla stosunkowo małej różnicy temperatur w wyniku promieniowania powstaje strumień

$$Q_{1\to 2}^R \approx \frac{4T_1^3}{\frac{1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1} \sigma \left( T_1 - T_2 \right).$$
 (191)

Policzmy przykład. Przyjmijmy, że obie płyty są z drewna ( $\varepsilon=0,9$ ), a między nimi znajduje się powietrze ( $\lambda_{powietrze}=0,026\frac{\rm W}{\rm mK}$ ). W drugim przypadku przyjmiemy, że płyty są wykonane z polerowanego metalu, dla którego  $\varepsilon=0.05$ . Temperatury płyt są odpowiednio  $T_1=30^{\rm o}{\rm C}$  i  $T_2=10^{\rm o}{\rm C}$ . Mamy wtedy

$$Q_{dd}^{R} = \frac{4 \cdot 303^{3}}{1, 2} \cdot 5,66 \cdot 10^{-8} \cdot 20 \frac{W}{m^{2}} = 106, 8 \frac{W}{m^{2}},$$

$$Q_{mm}^{R} = \frac{4 \cdot 303^{3}}{39} \cdot 5,66 \cdot 10^{-8} \cdot 20 \frac{W}{m^{2}} = 3,3 \frac{W}{m^{2}},$$
(192)

$$Q^{C} = \frac{0,026}{D} \cdot 20 \frac{W}{M^{2}} = \begin{cases} 520, 0 \frac{W}{M^{2}} & \text{dla } D = 0,001 \text{m} \\ 5, 2 \frac{W}{M^{2}} & \text{dla } D = 0,1 \text{m} \end{cases}$$
(193)

Przykłady te pokazują, że wymiana ciepła przez promieniowanie i przez przewodnictwo prowadzą do porównywalnych wielkości. Przy dużych odległościach wymiana ciepła przez przewodnictwo staje się mała, a przez promieniowanie praktycznie nie ulega zmianie. W szczególności w próżni przenoszenie ciepła przez promieniowanie staje się jedynym sposobem. Widzimy jednocześnie, że wymiana ciepła przez promieniowanie między dwoma polerowanymi ściankami jest o dwa rzędy wielkości mniejsza, niż w przypadku drewna. Z tego powodu ścianki termosu są lustrzane, a przestrzeń między ścianką wewnętrzną i zewnętrzną zawiera powietrze pod bardzo niskim ciśnieniem (w przybliżeniu – próżnia).

Biorąc pod uwagę przybliżenie małej różnicy temperatur możemy związek (191) dla wymiany ciepła między dwoma płytami na skutek promieniowania napisać w postaci

$$q_R \equiv Q_{1\to 2}^R = \alpha_R \Delta T, \quad \Delta T = T_1 - T_2,$$

$$\alpha_R = 4 \cdot 10^{-8} \cdot \bar{T}^3 \cdot C_{12}, \quad \bar{T} = \frac{1}{2} (T_1 + T_2).$$
(194)

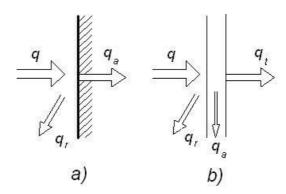
Współczynnik  $\alpha_R$  jest nazywany współczynnikiem absorpcji promieniowania. Przykładowe wartości średnie dla stałej promieniowania C, współczynnika emisji  $\varepsilon$ , i współczynnika absorpcji promieniowania  $\alpha_R$  podano w Tabeli 11.

Tabela 11: Współczynniki emisji i absorpcji

Materiał		$C$ , (0-100 $^{0}$ C) [W/m $^{2}$ K $^{4}$ ]	$\varepsilon \ (\sim 20^{\circ} \mathrm{C})$	$\alpha_R$
metale	polerowana miedź walcowane aluminium polerowana stal zardzewiała stal walcowana stal czarna emalia	0,18 0,23 1,40 4,90 5,23 5,25	0,03 0,04 0,25 0,61 0,77 0,95	0,87 0,90
farby	biała emalia farba do grzejników ciemna farba olejna	5,23 5,40 5,20	0,20 0,93 0,90	0,31
różne materiały	papa gips cegła czerwona drewno beton tynk biały tynk szary szkło (6mm) szkło Calorex szkło Comfort lód	5,35 5,23 5,35 5,40 5,45 5,45 5,45 5,25 5,25 0,65 5,50	0,90 0,90 0,93 0,94 0,96 0,97 0,97 0,91 0,11 0,12 0,97	0,90 0,32 0,55 0,40 0,55 0,36 0,65 0,12 0,41 0,34

# 4.6 Wymiana ciepła promieniowania przez przegrody budowlane

W projektowaniu wyróżnia się dwa typy elementów odbierające ciepło promieniowania: nieprzezroczyste i przezroczyste (patrz Rys. 9). W elemencie nieprzezroczystym gęstość strumienia ciepła dzieli się na dwie części:  $q_a$  – absorbowaną i  $q_r$  – odbitą przez element. Natomiast w elemencie przezroczystym strumień ciepła dzieli się na trzy części:  $q_a$  – absorbowaną,  $q_r$  – odbitą i  $q_t$  – przewodzoną (transmitowaną).



Rys.9: Schemat transportu ciepła na skutek promieniowania: a) element nieprzezroczysty, b) element przezroczysty.

Gęstość strumienia spełniają związki

a) 
$$q_r = r \cdot q$$
,  $q_a = a \cdot q$ ,  $a + r = 1$ ,  
b)  $q_r = r \cdot q$ ,  $q_a = a \cdot q$ ,  $q_t = t \cdot q$ ,  $a + r + t = 1$ . (195)

Współczynniki: stopień odbicia r, stopień absorpcji a, stopień stopień przewodzenia t są zależne od materiału.

## 4.7 Uwagi końcowe

Zrozumieniem natury promieniowania zajmowało się wielu znamienitych fizyków XIX wieku, takich jak Kirchhoff, Stefan, Boltzmann, Jeans, Wien, Planck. Doprowadziło to do powstania nowej dziedziny fizyki – mechaniki kwantowej. Podstawowy wynik uzyskał Planck, który wyprowadził tzw. wzór Plancka dla promieniowania, który wiąże gęstość strumienia energii promieniowania z częstotliwością fali elektromagnetycznej i pozwala obliczyć średni strumień. Wynik jest identyczny ze wzorem Stefana-Boltzmanna.

# 5 Wymiana ciepła przez przegrody budowlane

Normy:

PN-EN ISO 6946:1999 Komponenty budowlane i elementy budynku. Opór cieplny i współczynnik przenikania ciepła. Metoda obliczania

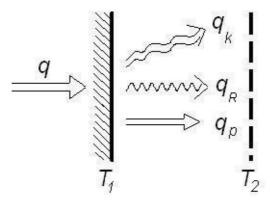
Norma ta zastępuje: PN-82/B-02020 Ochrona cieplna budynków. Wymagania i obliczenia.

ISO/DIS: właściwości cieplne budynków - Współczynnik strat ciepła przez przenikanie - Metoda obliczania

PN-EN ISO 7345:1998 Izolacja cieplna. Wielkości fizyczne i definicje

## 5.1 Transport ciepła przez przegrody budowlane

Jak wynika z powyższych uwag trzy mechanizmy transportu ciepła przez przegrody należy uwzględnić przy projektowaniu. Przedstawiono je schematycznie na Rys. 10.



Rys.10: Schemat transportu ciepła przez przegrodę przez przewodnictwo, promieniowanie i konwekcję

Gęstości strumienia ciepła są dane w przybliżeniu przez zależności

$$q_k = \alpha_k (T_1 - T_2), \quad q_p = \alpha_p (T_1 - T_2), \quad q_R = \alpha_R (T_1 - T_2),$$

$$q = \alpha (T_1 - T_2), \quad \alpha = \alpha_k + \alpha_p + \alpha_R,$$
(196)

gdzie

 $\alpha_R$  – współczynnik przenoszenia ciepła na skutek promieniowania, [W/m<sup>2</sup>K],

 $\alpha_k$  – współczynnik przenoszenia ciepła na skutek unoszenia (konwekcji), [W/m²K],

 $\alpha_p$  – współczynnik przenoszenia ciepła na skutek przewodnictwa, [W/m<sup>2</sup>K],

 $\alpha$  – współczynnik przenoszenia ciepła, [W/m<sup>2</sup>K],

 $q_R$  – gęstość strumienia ciepła na skutek promieniowania, [W/m<sup>2</sup>],

 $q_k$  – gęstość strumienia ciepła na skutek unoszenia (konwekcji), [W/m<sup>2</sup>],

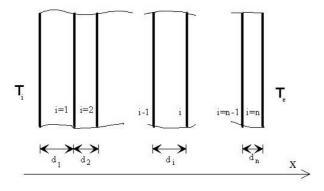
 $q_p$  – gęstość strumienia ciepła na skutek przewodnictwa, [W/m<sup>2</sup>],

 $T_1$  – temperatura powierzchni przegrody, [ ${}^0$ C],

 $T_2$  – temperatura powietrza, [ ${}^0$ C].

## 5.2 Przewodnictwo cieplne przez przegrody

Analizę wymiany ciepła rozpoczniemy trzema przykładami przewodnictwa przez przegrody. W pierwszym przykładzie przegroda składa się z n warstw o grubościach  $d_i$ , i = 1, ...n i wspóczynnikach przewodnictwa ciepła  $\lambda_i$ , i = 1, ...n. Zakładamy, że na zewnątrz przegrody stała temperatura po lewej stronie jest  $T_i$ , a po prawej  $T_e$  (por. Rys. 11). Zakładamy również, że można pominąć efekty odbicia na powierzchniach zewnętrznych, a powierzchnie kontaktu między elementami przegrody są idealne (tzn. temperatura jest na nich ciągła).



Rys. 11: Schemat przegrody o n warstwach dla przepływu ciepła w kierunku osi x.

Aby określić wymiane ciepła i rozkład temperatur musimy rozwiązać układ równań

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = 0$$
,  $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ ,

dla prostego jednowymiarowego przypadku (w kierunku x). Oznacza to, że w każdej warstwie spełnione są warunki

$$\frac{dq_x}{dx} = 0 \quad q_x = \text{const.},$$

$$q_x = -\lambda_i \frac{dT}{dx}, \quad T_{i-1}^- = T_{i-1}^+, \quad T_i^- = T_i^+, \quad i = 1, ..., n,$$

$$T_0^+ = T_i, \quad T_n^- = T_e,$$
(197)

gdzie "+" oznacza wartość po prawej stronie powierzchni kontaktu, a "-" – po lewej. Tym samym rozkład temperatury w każdej warstwie jest liniowy. Dla temperatur na powierzchniach kontaktowych otrzymujemy

$$T_1 = T_i - q_x \frac{d_1}{\lambda_1}, \quad T_2 = T_1 - q_x \frac{d_2}{\lambda_2}, \quad \dots \quad T_n = T_e = T_{n-1} - q_x \frac{d_n}{\lambda_n}.$$
 (198)

Stad wynika

$$T_e = T_i - q_x \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i},$$

lub po rozwiązaniu ze względu na strumień ciepła  $q_x$ 

$$q_x = \frac{T_i - T_e}{\sum_{i=1}^n R_i}, \quad R_i = \frac{d_i}{\lambda_i}.$$
 (199)

Współczynnik  $R_i$  jest nazywany oporem cieplnym warstwy i. Dla wygody zapisu wprowadza się również oznaczenie

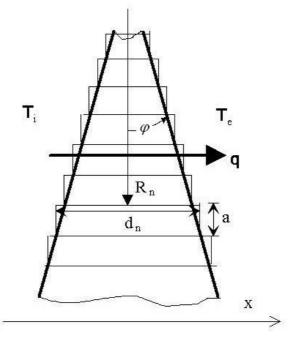
$$r_i = \frac{1}{\lambda_i},\tag{200}$$

i tą wielkość nazywa się oporem cieplnym właściwym.

Ze wzoru (199) wynika, oczywiście, że dla  $T_i > T_e$  strumien ciepła jest skierowany w kierunku dodatnim osi x jeśli wszystkie współczynniki  $\lambda_i$  są dodatnie, a to wynika z drugiej zasady termodynamiki. Tym samym, jak należało oczekiwać, ciepło jest przenoszone z obszaru cieplejszego do zimniejszego.

Dla przegrody o powierzchni A (prostopadłej do kierunku strumienia, a więc do osi x w naszym przykładzie) wprowadza się również istotne w projektowaniu pojęcie ilości ciepła Q, które określa całkowitą ilość energii przeprowadzoną przez przegrodę w czasie t

$$Q = q_x A t. (201)$$



Rys. 12: Schemat przegrody jednorodnej o nierównoległych ściankach.

Przechodzimy do drugiego przykładu, w którym rozważamy przepływ ciepła przez jednorodną przegrodę o jednostkowej grubości i o nierównoległych ściankach zewnętrznych (Rys. 12). Zakładamy, że strumień ciepła jest w całej przegrodzie skierowany w kierunk osi x. Takie założenie, które pozwala na przeprowadzenie rozważań w jednym wymiarze, jest możliwe, gdy kąt rozwarcia  $\varphi$  nie jest zbyt duży. Norma określa maksymalne nachylenie ścianek jako równe 5%.

Policzymy najpierw ilość ciepła na jednostkę czasu (strumień ciepła)  $\phi$  przez tą przegrodę w sposób przybliżony dzieląc ją na warstwy o równej wysokości a i grubości  $d_n = 2R_n \tan \varphi = 2an \tan \varphi$ . Wtedy na podstawie rozważań podobnych do tych, przeprowadzonych powyżej otrzymujemy dla  $\phi$  następujący związek

$$\phi = \sum_{n=1}^{N} a \cdot 1 \cdot q_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda \left( T_i - T_e \right)}{2n \tan \varphi} = \lambda \left( T_i - T_e \right) \frac{1}{2 \tan \varphi} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}, \tag{202}$$

gdzie N jest ilością elementów, na jakie podzieliliśmy przegrodę. Dla dostatecznie dużej ilości tych elementów można sumę w powyższym wzorze zastąpić przez całkę

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a}{an} \approx \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{y} dy = \ln \frac{d_2}{d_1},\tag{203}$$

gdzie  $d_1=2a\tan\varphi,\,d_2=2aN\tan\varphi.$  Ostatecznie

$$\phi = \frac{\lambda}{2\tan\varphi} \left( T_i - T_e \right) \ln \frac{d_2}{d_1}. \tag{204}$$

Trzeci przykład dotyczy wymiany ciepła przez przegrodę, gdy na brzegach zadany jest strumień ciepła powiązany z przejmowaniem ciepła. Warunek na dodatnio zorientowanym (wektor jednostkowy **n** zorientowany na zewnątrz obszaru ma zwrot w kierunku osi x) brzegu  $\partial B$  takiej przegrody jest zadany przez tzw. warunek brzegowy trzeciego rodzaju

$$-\lambda \frac{dT}{dx}\Big|_{\partial B} = \alpha \left( T|_{\partial B} - T_e \right), \quad \frac{dT}{dx}\Big|_{\partial B} \equiv \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} T|_{\partial B}$$
 (205)

gdzie  $\alpha$  ([W/m²K]) jest współczynnikiem przejmowania ciepła,  $T|_{\partial B}$  jest temperaturą na brzegu od stony przegrody, a  $\frac{dT}{dx}|_{\partial B}$  – gradientem temperatury na brzegu od strony przegrody.  $T_e$  oznacza temperaturę zewnętrzną.

Współczynnik  $\alpha$  zależy nie tylko od materiału przegrody, geometrii powierzchni, płynu na zewnątrz przegrody, ale również od ruchu płynu, skraplania i parowania na powierzchni i wielu innych czynników. Jego dokładne określenie jest bardzo trudne. W Tabeli 12 podano kilka wartości orientacyjnych.

**Tabela 12:** Współczynnik przejmowania ciepła [W/m<sup>2</sup>K] (S. Wiśniewski, T.S. Wiśniewski [2000]).

Rodzaj płynu	Konwekcja swobodna	Konwekcja wymuszona
Gaz	5-30	30-500
Woda	30-300	$300 - 2 \cdot 10^4$
Olej	5-100	30-3000
Ciekłe metale	50-500	$500 - 2 \cdot 10^4$
Wrząca woda	$2 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^3 - 10^5$
Kondensacja pary wodnej	$3 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^5$

Rozważmy przegrodę o grubości d, współczynnikach przejmowania ciepła  $\alpha_l$ ,  $\alpha_r$  dla, odpowiednio, x=0 i x=d. Temperatura na zewnątrz przegrody wynosi  $T_l$  dla x<0 i  $T_r$  dla x>d. Przewodnictwo przez przegrodę opisane jest zależnościami

$$\frac{dq}{dx} = 0, \quad q = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad 0 < x < d, 
q(x = 0) = -\alpha_l (T(x = 0) - T_l), \quad q(x = d) = \alpha_r (T(x = d) - T_r).$$
(206)

Rozwiązanie problemu jest więc następujące

$$T = -C_1 x + C_2.$$

gdzie dla stałych całkowania mamy związki

$$-\lambda C_1 = \alpha_l (C_2 - T_l),$$
  
$$-\lambda C_1 = \alpha_r (-C_1 d + C_2 - T_r).$$

Otrzymujemy więc

$$C_{1} = \frac{1}{\lambda} \frac{T_{r} - T_{l}}{\frac{1}{\alpha_{l}} + \frac{1}{\alpha_{r}} + \frac{d}{\lambda}}, \quad C_{2} = T_{l} - \frac{1}{\alpha_{l}} \frac{T_{r} - T_{l}}{\frac{1}{\alpha_{l}} + \frac{1}{\alpha_{r}} + \frac{d}{\lambda}}.$$
 (207)

Gęstość strumienia ciepła ma więc postać

$$q = \frac{T_l - T_r}{\frac{1}{\alpha_l} + \frac{1}{\alpha_r} + \frac{d}{\lambda}}.$$
 (208)

Norma PN-EN ISO 6946 przewiduje (§5.2), że w przypadku braku dokładnych informacji o warunkach wymiany ciepła w odniesieniu do powierzchni płaskich stosuje się następujące wartości oporów przejmowania ciepła  $R = 1/\alpha$  ([m²K/W])

**Tabela 13:** Opory przejmowania ciepła ([m²K/W])

	Kierunek	strumienia	cieplnego
	w górę	poziomy	w dół
$R_{si}$ – wewnątrz	0,10	0,13	0,17
$R_{se}$ – zewnątrz	0,04	0,04	0,04

Odchylenie od poziomu może wynosić  $\pm 30^{\circ}$ .

Ogólnie opór przejmowania ciepła jest wyrażony wzorem

$$R_s = \frac{1}{\alpha_k + \alpha_R},\tag{209}$$

gdzie  $\alpha_k$  jest współczynnikiem przejmowania ciepła przez konwekcję<sup>6</sup>, a  $\alpha_R$  – przez promieniowanie. Dane są one wzorami

$$\alpha_R = \varepsilon \alpha_s, \quad \alpha_s = 4\sigma T_m^3, \quad \sigma = 5,66 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K},$$
(210)

a  $T_m$  oznacza średnią wartość temperatury absolutnej powierzchni i jej otoczenia.

Dla powierzchni wewnętrznych współczynnik  $\alpha_k$  jest następujący

- w przypadku ruchu ciepła w górę:  $\alpha_k = 5,0 \text{ W/m}^2\text{K}$ ,
- w przypadku ruchu ciepła poziomo:  $\alpha_k = 2.5 \text{ W/m}^2\text{K}$
- –. w przypadku ruchu ciepła w dół:  $\alpha_k = 0,7 \text{ W/m}^2\text{K}$ .

W przypadku powierzchni zewnętrznych

$$\alpha_k = 4 + 4v, \tag{211}$$

gdzie v jest prędkością wiatru w pobliżu powierzchni w m/s.

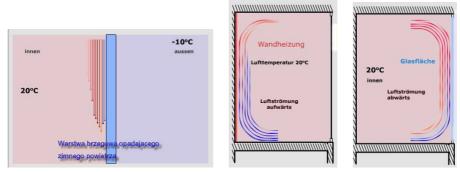
W przypadku powierzchni z występami przyjmuje się opór przejmowania ciepła w postaci

$$R_{sp} = R_s \frac{A_p}{4},\tag{212}$$

gdzie  $R_s$  jest oporem ciepła komponentu płaskiego,  $A_p$  oznacza pole powierzchni występu, a A – rzeczywiste pole powierzchni występu.

$$\alpha_K \equiv h_c, \quad \alpha_R = h_r.$$

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup>normowe oznaczenie dla tych współczynników:



Rys. 13: Warstwy brzegowe powstające przez konwekcję:

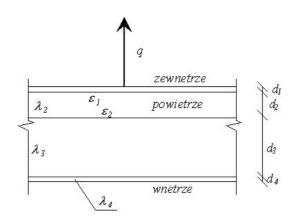
- 1) Rysunek lewy: opadanie powietrza chłodzonego przez ścianę
- 2) Rysunek środkowy: wstępujący strumień powietrza na skutek ogrzewania przez ścianę 3) Rysunek prawy: opadający strumień powietrza na skutek chłodzenia przez szybę

### 5.2.1 Przewodnictwo przegród z pustką powietrzną

W przypadku przegród z pustką istotny wkład do transportu ciepła przez przegrody ma promieniowanie. Pokazujemy to na przykładach.

**Przykład 1:** Dla przegrody pokazanej na rysunku określić temperaturę wewnętrzną  $\vartheta_w$  uwzględniając promieniowanie w warstwie powietrza. Porównać z przypadkiem, gdy pomija się promieniowanie.

<u>Dane</u>:  $q = 25 \text{ W/m}^2$ ,  $\vartheta_z = -15^0 \text{ C}$ ,  $\lambda_1 = 1,36 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_2 = 0,026 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_3 = 0.44 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_4 = 1,00 \text{ W/mK}$ ,  $\varepsilon_1 = 0,11$ ,  $\varepsilon_2 = 0,96$ ,  $\vartheta = T - T_0$ ,  $T_0 = 273^0 \text{ K}$ ,  $d_1 = 0,02 \text{ m}$ ,  $d_2 = 0,10 \text{ m}$ ,  $d_3 = 0,25 \text{ m}$ ,  $d_4 = 0,02 \text{ m}$ .



#### Rozwiązanie

Oznaczmy przez  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_w$  na granicach warstw i, odpowiednio, wewnątrz przegrody. Wtedy strumienie ciepła w poszczególnych warstwach mają postać

$$q = U_{1}(\vartheta_{1} - \vartheta_{z}) = U_{2}(\vartheta_{2} - \vartheta_{1}) = U_{3}(\vartheta_{w} - \vartheta_{2}),$$

$$U_{1} = \frac{1}{d_{1}/\lambda_{1}}, \quad U_{2} = \frac{1}{d_{2}/\lambda_{2}} + \frac{4\sigma T_{0}^{3}}{1/\varepsilon_{1} + 1/\varepsilon_{2} - 1}, \quad U_{3} = \frac{1}{d_{3}/\lambda_{3} + d_{4}/\lambda_{4}},$$
(213)

gdzie

$$\sigma = 5,66 \times 10^{-8}$$
.

Eliminuląc temperatury wewnętrzne  $\vartheta_1,\vartheta_2$ w powyższym układzie równań otrzymujemy

$$\vartheta_w = \vartheta_z + q \left( \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} \right).$$
(214)

W przypadku pominięcia promieniowania mamy, oczywiście,

$$\vartheta_w = \vartheta_z + q \frac{1}{U}, \quad U = \frac{1}{d_1/\lambda_1 + d_2/\lambda_2 + d_3/\lambda_3 + d_4/\lambda_4}.$$
(215)

Podstawienie danych liczbowych daje

$$\begin{array}{lll} U_1 & = & 68, & U_2 = 0,7644, U_3 = 1,7002, \\ \frac{1}{U} & = & 4,4484, & \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \frac{1}{U_3} = 1,9111, \\ \\ \vartheta_w & = & \left\{ \begin{array}{ll} 32,78^0 \text{ C z uwzględnieniem promieniowania} \\ 96,21^0 \text{ C bez uwzględnienia promieniowania} \end{array} \right. \end{array}$$

**Zadanie 2:** Dla przegrody pokazanej na rysunku z Przykładu 1 określić strumień ciepła q uwzględniając promieniowanie w warstwie powietrza. Porównać ze strumieniem, który otrzymuje się nie uwzględniając promieniowania.

<u>Dane</u>:  $\vartheta_w = 20^0$  C,  $\vartheta_z = -20^0$  C,  $\lambda_1 = 1,36$  W/mK,  $\lambda_2 = 0,026$  W/mK,  $\lambda_3 = 0.44$  W/mK,  $\lambda_4 = 0.80$  W/mK,  $\varepsilon_1 = 0,28, \varepsilon_2 = 0,28, \vartheta = T - T_0, T_0 = 273^0$  K,  $d_1 = 0,01$  m,  $d_2 = 0,05$  m,  $d_3 = 0,25$  m,  $d_4 = 0,03$  m.

Rozwiązanie

Trzeba spełnić układ 3 równań (213). Obliczamy z nich  $\vartheta_1, \vartheta_2$  i q. Po eliminacji q otrzymujemy

$$U_3(\vartheta_w - \vartheta_2) = U_2(\vartheta_2 - \vartheta_1),$$

$$U_1(\vartheta_1 - \vartheta_z) = U_2(\vartheta_2 - \vartheta_1),$$
(216)

gdzie  $U_1, U_2, U_3$  są zdefiniowane, jak w Zadaniu 1. Stąd mamy

$$\vartheta_2 - \vartheta_1 = \frac{\vartheta_w - \vartheta_z}{U_2/U_3 + U_2/U_1 + 1},$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_w - \frac{U_2}{U_3} (\vartheta_2 - \vartheta_1).$$
(217)

Strumień ciepła ma więc postać

$$q = \begin{cases} U(\vartheta_w - \vartheta_z) \text{ bez uwzglednienia promieniowania} \\ U_3(\vartheta_w - \vartheta_2) \text{ z uwzglednieniem promieniowania} \end{cases}$$
 (218)

Podstawienie danych liczbowych daje

$$\frac{1}{U} = 2,5361, \quad \frac{1}{U_1} = 0.007353, \quad \frac{1}{U_2} = 0.7875, \quad \frac{1}{U_3} = 0.6057,$$

$$\vartheta_1 = -19,79^{\circ} \text{ C}, \quad \vartheta_2 = 2,70^{\circ} \text{ C},$$

$$q = \begin{cases}
15,77 \text{ W/m}^2 \text{ bez promieniowania} \\
28,56 \text{ W/m}^2 \text{ z promieniowaniem.} 
\end{cases}$$
(219)

## 5.2.2 Ograniczanie strat ciepła w nowych i odnawianych budynkach

Tabela 14 zawiera maksymalne wartości współczynnika przenikania ciepła

$$U = \frac{\dot{Q}}{A(T_1 - T_2)},\tag{220}$$

dla takich budynków.

Tabela 14: Maksymalny współczynnik przenikania ciepła

	$\max U$	minimalna grubość ocieplenia (bez dowodu dla $\lambda = 0,040 \text{ W/mK}$
ściany zewnętrzne	$0,60 \text{ W/m}^2\text{K}$	50 mm
okno	_	podwójne lub izolac. przeszklenie
stropy piwnic nad gruntem, ściany i stropy graniczące z nieogrzewanym pomieszcz.	$0,70~\mathrm{W/m^2K}$	40 mm
stropy pod strychami nieużytk. i stropy zamykające przestrzenie przed powietrzem zewnętrznym	$0,45~\mathrm{W/m^2K}$	80 mm

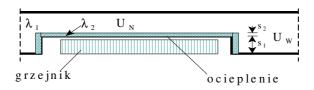
Tabela 15: Ograniczenie strat ciepła dla okien i drzwi balkonowych

Normalnie ogrzewany budynek	podwójne przeszklenie albo szkło izolac. $U_{okno} \leq 3,1 \text{ W/m}^2\text{K}^*$		
Mało ogrzewany budynek	dopuszczalne pojedyńcze przeszklenie		
Budynki i hale sportowe	dopuszczalne pojedyńcze przeszklenie $U \leq 5,2 \ {\rm W/m^2 K}$		
Budynki w czasie zmian konstrukcyjnych	podwójne przeszklenie albo szkło izolac. $U_{okno} \leq 3,1 \text{ W/m}^2\text{K}$		

<sup>\*</sup>dla wielkopowierzchniowych (np. szyby wystawowe)  $U=1,75~\mathrm{W/m^2K}$ 

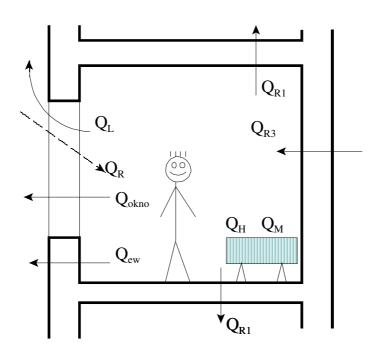
Tabela 16: Drzwi zewnętrzne

powierzchnia drzwi <5 m², część oszkl. < 10%	U jak dla sąsiednich ścian
powierzchnia drzwi <5 m², część oszkl. > 10%	$U = 5,2 \text{ W/m}^2 \text{K}$ lub właściwe dla drzwi
powierzchnia drzwi >5 m <sup>2</sup>	j.w.



Rys. 14: Wnęki grzejników

$$U_N \ge U_W, \quad s_2 \ge s_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$



Rys. 15: Bilans cieplny dla pomieszczeń

Ogólny warunek bilansu:

$$\sum \dot{Q} = 0.$$

Przewodzenie:  $\dot{Q}_T = \sum q_i A_i = U_i \Delta \vartheta A_i$ ,

Przewietrzanie:  $\dot{Q}_L = 0,36 \cdot V_R n_L (\vartheta_i - \vartheta_e), V_R$  – objętość pomieszczenia,  $n_L = \dot{V}/V_R$ ,  $\dot{V}$  – strumień objętościowy [m³/h] (0,36 wynika z iloczynu  $\rho c_p$ ),

Promieniowanie:  $\dot{Q}_R = J_m g_F A_{oszklenie}$ ,  $J_m$  – średnia intensywność promieniowania  $[W/m^2]$ ,  $g_F$  – współczynnik przepuszczalności promieniowania (= 1 bez osłon, 0,5 – firanki, żaluzje, markizy, 0,2 – 0,6 – folia wewnętrzna, 0,3 – lamele zewnętrzne, loggie).

Ciepło wytwarzane w maszynach:  $\dot{Q}_{M},$ 

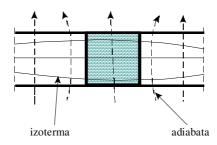
Grzejniki:  $\dot{Q}_H$ ,

Ciepło od osób przebywających w pomieszczeniu.

# 5.3 Przykłady powstawania mostków cieplnych

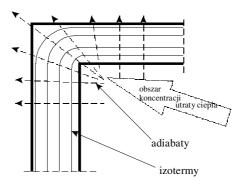
Mostki cieplne są to obszary powiększonej wymiany ciepła i mogą być

a) materiałowe; na Rys. 16 przedstawiono zakrzywienie izoterm i prostopadłych do nich adiabat (linie kierunków strumienia ciepła) dla niejednorodnej przegrody:



Rys.16: Mostek materiałowy

### b) geometryczne:



Rys. 17: Mostek geometryczny

Wymagają zwykle dokładnej wielowymiarowej analizy równania przewodnictwa cieplnego (numerycznej lub analitycznej).

#### Przykład obliczeń jednowymiarowych strat ciepła w mostku

W celu zademonstrowania ilościowego wpływu mostków cieplnych na przekazywanie ciepła rozpatrzymy prosty przykład trójwarstwowej ścianki osłonowej, przedstawionej na Rys. 18. Składa się ona z dwóch warstw dobrze przewodzącej ciepło folii o grubości s każda i z materiału izolacyjnego o grubości h. Mostki cieplne powstają w przegrodach pionowych z takiej samej folii i o grubości g rozstawionych w odległości 2l. Własności materiałów oznaczamy:  $\lambda$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego materiału izolacyjnego,  $\lambda_a$  – współczynnik przewodnictwa cieplnego folii,  $\alpha_i$  – współczynnik przejmowania ciepła na stronie wewnętrznej,  $\alpha_e$  – współczynnik przejmowania ciepła na stronie zewnętrznej. Wtedy współczynnik przenikania ciepła (odwrotność oporu cieplnego) między górną powierzchnią dolnej folii i powierzchnią zewnętrzną, który będzie potrzebny w obliczeniach, ma postać (por. Rys. 18)

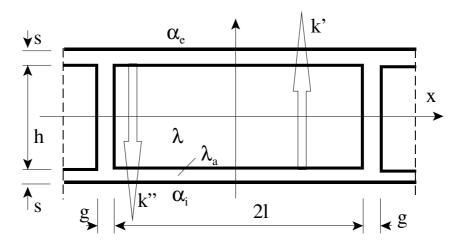
$$k' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_e} + \frac{s}{\lambda_a} + \frac{h}{\lambda}}. (221)$$

Podobnie współczynnik przenikania ciepła między dolną powierzchnią górnej folii i powierzchnią wewnętrzną ma postać

$$k'' = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{s}{\lambda_a} + \frac{h}{\lambda}}.$$
 (222)

Wreszcie całkowity współczynnik przenikania ciepła przez przegrodę jest określony związkiem

$$k_0 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + 2\frac{s}{\lambda_a} + \frac{h}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_e}}.$$
 (223)



Rys. 18: Schemat trójwarstwowej ścianki osłonowej, rozważany w przykładzie

Załóżmy, że temperatura wewnętrzna jest  $T_i$ , a temperatura zewnętrzna  $T_e$ . Wtedy przez połowę długości jednej komory w przegrodzie bez mostków termicznych (tzn. bez pionowych ścianek z folii) przepływa ciepło  $Q_0$ 

$$Q_0 = k_0 l \left( T_i - T_e \right), \tag{224}$$

gdzie pominięto grubość folii g w porównaniu z l.

W przypadku istnienia mostka trzeba uwzględnić udział pionowych ścianek w przenoszeniu ciepła. W tym celu musimy oszacować dopływ ciepła do tych ścianek w kierunku poziomym poprzez obie folie poziome i w warstwie izolacyjnej. Zakładamy, że udział tego ostatniego strumienia jest pomijalny.

Poziomy strumień w folii dolnej  $q_{(1)}$  jest opisany następującym równaniem, wynikającym z zasady zachowania energii

$$s\frac{dq_{(1)}}{dx} = \alpha_i \left( T_i - T_{(1)} \right) - k' \left( T_{(1)} - T_e \right), \quad q_{(1)} = -\lambda_a \frac{dT_{(1)}}{dx}, \tag{225}$$

gdzie  $T_{(1)} = T_{(1)}(x)$  jest temperaturą dolnej folii w punkcie x. Prawa strona tego równania określa, oczywiściwe, dopływ ciepła z wnętrza na skutem przejmowania ciepła przez folię na powierzchni dolnej i odpływ ciepła na zewnątrz poprzez górną powierzchnię folii. Związek ten można napisać w postaci

$$\frac{d^2T_{(1)}}{dx^2} - m_{(1)}^2T_{(1)} = -m_{(1)}^2T_{(1)}^0, \quad m_{(1)}^2 = \frac{\alpha_i + k'}{s\lambda_a}, \quad T_{(1)}^0 = \frac{\alpha_i T_i + k' T_e}{\alpha_i + k'}.$$
 (226)

W analogiczny sposób otrzymujemy równanie na rozkład temperatury  $T_{(2)}$  w górnej folii

$$\frac{d^2T_{(2)}}{dx^2} - m_{(2)}^2T_{(2)} = -m_{(2)}^2T_{(2)}^0, \quad m_{(2)}^2 = \frac{\alpha_e + k''}{s\lambda_a}, \quad T_{(1)}^0 = \frac{\alpha_e T_e + k'' T_i}{\alpha_e + k''}.$$
 (227)

Rozwiązania tych równań mają następującą postać

$$T_{(1)} = A_1 \operatorname{sh} m_{(1)} x + B_1 \operatorname{ch} m_{(1)} x + T_{(1)}^0,$$

$$T_{(2)} = A_2 \operatorname{sh} m_{(2)} x + B_2 \operatorname{ch} m_{(2)} x + T_{(2)}^0.$$
(228)

Ponieważ problem jest symetryczny względem osi x=0 więc strumień ciepła w tym punkcie musi być równy zero. Tym samym musi znikać w tym punkcie pierwsza pochodna temperatury. Mamy więc

$$A_1 = A_2 = 0. (229)$$

Pozostałe dwie stałe wyznaczymy z warunku wymiany ciepła pomiędzy folią pionową i poziomą w punkcie  $x \approx l$ . Na skutek dopływu lub odpływu ciepła z dwóch stron mamy w tym punkcie następujące warunki Newtona

$$-s\lambda_{a} \frac{dT_{(1)}}{dx}\Big|_{x=l} = \frac{1}{2}g\frac{\lambda_{a}}{h} (T_{(1)} - T_{(2)})\Big|_{x=l},$$

$$-s\lambda_{a} \frac{dT_{(2)}}{dx}\Big|_{x=l} = -\frac{1}{2}g\frac{\lambda_{a}}{h} (T_{(1)} - T_{(2)})\Big|_{x=l},$$
(230)

gdzie prawa strona wynika, oczywiście, z rozwiązania prostego (liniowego) procesu transportu ciepła w folii pionowej.

Podstawienie rozwiązań (228) do tych warunków brzegowych prowadzi do następujących związków dla stałych całkowania

$$B_{1} = -\frac{1}{\operatorname{ch} m_{(1)} l} \frac{(\alpha_{i} \alpha_{e} - k' k'')}{(\alpha_{i} + k') (\alpha_{e} + k'')} \frac{T_{i} - T_{e}}{1 + \frac{m_{(1)} \operatorname{th} m_{(1)} l}{\operatorname{th} m_{(2)} l} + \frac{2hsm_{(1)}}{g} \operatorname{th} m_{(1)} l},$$

$$B_{2} = \frac{m_{(1)} \operatorname{th} m_{(1)} l}{m_{(2)} \operatorname{th} m_{(2)} l} \frac{(\alpha_{i} \alpha_{e} - k' k'')}{(\alpha_{i} + k') (\alpha_{e} + k'')} \frac{T_{i} - T_{e}}{1 + \frac{m_{(1)} \operatorname{th} m_{(1)} l}{\operatorname{th} m_{(2)} l} + \frac{2hsm_{(1)}}{g} \operatorname{th} m_{(1)} l}.$$

$$(231)$$

Te związki określają rozkłady temperatury w poziomych odcinkach folii. Aby określić całkowity strumień ciepła w kierunku pionowym w przegrodzie z mostkami cieplnymi wystarczy znaleźć średni strumień ciepła Q dopływający do dolnej folii z wnętrza na odcinku o długości l. Na skutek zasady zachowania energii strunień ten nie ulega zmianie na całej grubości przegrody i powinien być porównany ze strumieniem  $Q_0$  dla przegrody bez mostków. Mamy więc

$$Q = \int_{0}^{l} \alpha_{i} \left( T_{i} - T_{(1)} \right) dx = \alpha_{i} \left( T_{i} - T_{(1)}^{0} \right) l - B_{1} \frac{\alpha_{i}}{m_{(1)}} \operatorname{sh} m_{(1)} l =$$

$$= \left[ \frac{\alpha_{i} k' l}{\alpha_{i} + k'} + \frac{\alpha_{i}}{m_{(1)}} \frac{\alpha_{i} \alpha_{e} - k' k''}{(\alpha_{i} + k') (\alpha_{e} + k'')} \frac{\operatorname{th} m_{(1)} l}{1 + \frac{m_{(1)}}{m_{(2)}} \frac{\operatorname{th} m_{(1)} l}{\operatorname{th} m_{(2)} l} + \frac{2 \operatorname{hsm}_{(1)}}{q} \operatorname{th} m_{(1)} l} \right] (T_{i} - T_{e}).$$

$$(232)$$

Aby ilościowo porównać wyniki rozpatrzmy następujący przykład numeryczny:

- folia aluminiowa, dla której  $\lambda_a=164,5$  [W/mK], a jej grubość s=g=0,002 m,
- rdzeń ze styropianu, dla którego  $\lambda=0,04$  [W/mK] oraz h=0,08 m, l=0,30 m,
- współczynniki przejmowania ciepła  $\alpha_i=8,1$  [W/m²K],  $\alpha_e=23,3$  [W/m²K]. Wtedy

$$k' = 0,4895 \left[ \text{W/m}^2 K \right], \quad k'' = 0,4709 \left[ \text{W/m}^2 K \right],$$

$$k_0 = 0,4616 \left[ \text{W/m}^2 K \right], \qquad (233)$$

$$m_{(1)} = 5,1096 \left[ 1/\text{m} \right], \quad m_{(2)} = 8,5001 \left[ 1/\text{m} \right],$$

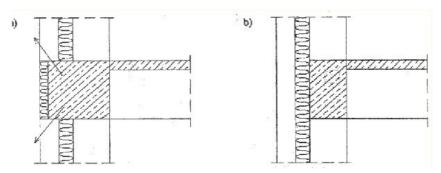
$$\text{th } m_{(1)}l = 0,9109, \quad \text{th } m_{(2)}l = 0,9879.$$

Dla strumieni ciepła otrzymujemy

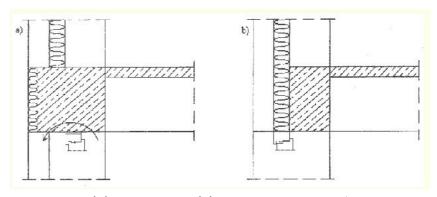
$$Q = 0,5799 (T_i - T_e), \quad Q_0 = 0,1385 (T_i - T_e).$$
 (234)

Tym samym istnienie mostków termicznych powiększa strumień ciepła przez tą przegrodę o faktor 4,1870!

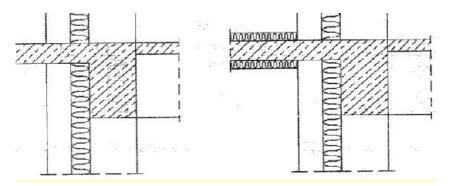
Na rysunkach 19-24 pokazujemy błędy w projektowaniu komponentów budynków, prowadzące do niejednowymiarowego przepływu ciepła przez przegrody i powstawaniu mostków cieplnych $^7$ .



Rys. 19: Błędne (a) i poprawne (b) rozwiązanie wieńca w ścianie szczelinowej

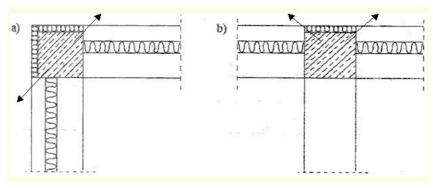


Rys. 20: Błędne (a) i poprawne (b) osadzenie okna w ścianie szczelinowej



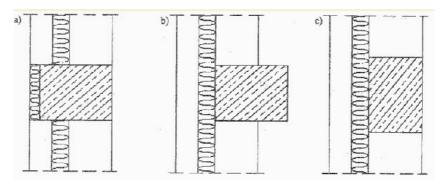
Rys. 21: Błędne (a) i poprawne (b) rozwiązanie płyty balkonowej

 $<sup>^7\</sup>mathrm{J.}$ A. Pogorzelski, Błędy projektu i wykonania murów szczelinowych w zakresie ochrony cieplnej, Prace ITB, 2002.

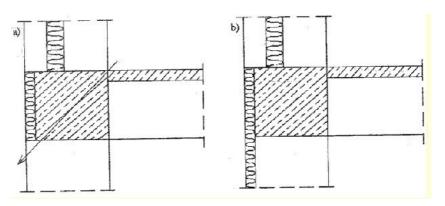


Rys. 22: Błędne rozwiązanie słupów żelbetowych w murze szczelinowym:

a) połączenie dwóch ścian zewnętrznych
b) połączenie ściany zewnętrznej z wewnętrzną



**Rys. 23:** Błędne (a) i poprawne (b,c) usytuowanie słupa w murze szczelinowym



Rys. 24: Błędne (a) i poprawne (b) ocieplenie wieńca stropu nad piwnicą

# 5.4 Współczynnik przenikania ciepła $U_K$ przegród z mostkami cieplnymi liniowymi

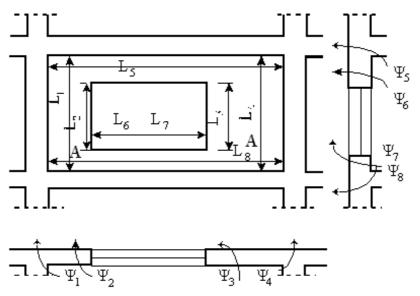
Mostki cieplne liniowe spowodowane są nieciągłościami lub pocieniemiem warstwy izolacji cieplnej, np. na długości ościeży okien lub drzwi balkonowych i nadproży oraz w obszarze węzłów konstrukcyjnych i wieńców w ścianach zewnętrznych.

Współczynnik przenikania ciepła  $U_K$  przegród z mostkami cieplnymi liniowymi służy do obliczania mocy grzejnej i sezonowego zapotrzebowania na ciepło lub do porównania z wymaganiami przepisów.

Współczynnik przenikania ciepła  $U_K$  przegród z mostkami cieplnymi liniowymi oblicza się ze wzoru

$$U_K = U_c + \Delta U, \quad \Delta U = \sum_i \frac{\Psi_i L_i}{A},$$

gdzie  $U_c$ -współczynnik przenikania ciepła  $[W/m^2 \cdot K]$  przegrody bez uwzględnienia wpływu mostków cieplnych liniowych,  $\Psi_i$  – liniowy współczynnik przenikania ciepła  $[W/m \cdot K]$  mostka liniowego o numerze i,  $L_i$  – długość [m] mostka liniowego o numerze i, A – pole powierzchni  $[m^2]$  przegrody w osiach przegród do niej prostopadłych, pomniejszone o pole powierzchni ewentualnych okien i drzwi balkonowych, obliczone w świetle ościeży. Do obliczania współczynników  $\Psi_i$  stosuje się na ogół metody numeryczne.



Rys. 25: Mostki liniowe i powierzchnia przegrody w pomieszczeniu A – pole powierzchni ściany w osiach przegród do niej prostopadłych z pomniejszeniem o pole powierzchni okna w świetle ościeży

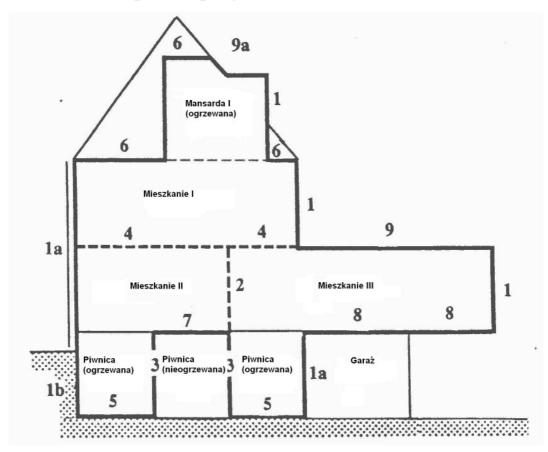
W projektowaniu indywidualnym dopuszcza norma uproszczone oszacowanie  $\Delta U$ . Dane dla tej poprawki zawiera Tabela 17.

**Tabela 17:** Poprawki współczynnika przenikania ciepła ze względu na powstawanie mostków cieplnych

Rodzaj przegrody	$\Delta U \left[ W/m^2 \cdot K \right]$
Ściany zewnętrzne pełne, stropy poddasza, stropodachy, stropy nad piwnicami	0,00
Ściany zewnętrzne z otworaki okiennymi i drzwiowymi	0,05
Ściany zewnętrzne z otworaki okiennymi i drzwiowymi oraz płytami balkonów lub loggii przenikającymi ścianę	0,15

Wartości dodatku  $\Delta U$  podane w Tabeli 17 odnoszą się do poprawnie rozwiązanych detali konstrukcyjnych przegród zewnętrznych. Wpływ mostków cieplnych w przypadku niepoprawnie rozwiązanych detali może być znacznie wyższy, niż to wynika z danych Tabeli 17.

# 5.5 Ochrona cieplna – projektowanie



Rys. 26: Ochrona cieplna budynku w zimie; linią grubą zaznaczono części ogrzewane budynku

**Tabela 18:** Wymagane wartości współczynników oporu i przejmowania ciepła przy projektowaniu ochrony cieplnej budynków (norma niemiecka 1981)

Ι	II	III	IV	V	VI
	Funkcja	$R$ $m^2K/W$	$1/\alpha_i$ m <sup>2</sup> K/W	$1/\alpha_e$ $m^2 K/W$	$R_{\rm max}$ $m^2 K/W$
1	Ściana zewnętrzna	0,55 $0,47^1$	0,13	0,04	$1,39$ $1,56^{1}$
1a	Ściany zewnętrzne	$0,55 \ 0,47^1$	0,13	0,08	$1,32$ $1,47^1$
1b	Ściana sąsiadująca z ziemią	$0,55 \ 0,47^1$	0,13	0	$1,47$ $1,67^1$
2	Ściana działowa mieszkań	Budynek z CO 0,07 Budynek bez CO 0,25	0,13	0,134	3,03 1,96
3	Ściana działowa między częścią ogrzwaną i nieogrzewaną	0,25	0,13	0,13	1,96
4	Stropy między mieszkaniami	Budynek z CO 0,17 Budynek bez CO 0,35	0,13 0,17	0,13 0,17	$ \begin{array}{c c} 2,33^{2} \\ 1,96^{3} \\ 1,64^{2} \\ 1,45^{3} \end{array} $
5	Podłogi ogrzewanych piwnic	0,90	0,17	0	0,93
6	Strop pod nierozbudowaną częścią strychu	0,90 średnio 0,45 w najniekorzyst- niejszym miejscu	0,13	0,08	0,90 1,52
7	Strop nad nieogrzewaną piwnicą	0,90 średnio 0,45 w najniekorzyst- niejszym miejscu	0,17	0,17	0,81 1,27
8	Strop nad garażem (ogrzewanym lub nie)	1,75 średnio 1,30 w najniekorzyst- niejszym miejscu	0,17	0,04	0,51 0,66
9a	Nieprzewietrzane przestrzenie pod płaskim dachem	1,10 średnio 0,80 w najniekorzyst- niejszym miejscu	0,13	0,04	0,79 1,03
9b	Przewietrzane płaskie i spadziste dachy	1,10 średnio 0,80 w najniekorzyst- niejszym miejscu	0,13	0,08	0,76 0,99

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Elementy budowlane o małej powierzchni

# 6 Wilgotność

## 6.1 Wprowadzenie

Zagadnienia związane z wilgotnością, tzn. kontaktem konstrukcji z wodą i parą wodną można podzielić na dwie grupy. Grupa pierwsza dotyczy problemów wilgotności powietrza w pomieszczeniach i na zewnątrz budynków i zawiera problemy transportu wilgoci

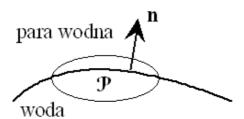
<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Strumień ciepła z dołu do góry

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Strumień ciepła z góry do dołu

poprzez ruch powietrza (konwekcję) i problemy przejść fazowych, a więc parowania i skraplania, tworzenia zawilgocenia na powierzchniach ścian i przegród i wpływu wilgoci na klimat pomieszczeń. Grupa druga dotyczy problemów transportu wilgoci przez materiały budowlane, takie jak ceramika budowlana, beton, materiały izolacyjne, itp.

Rozważania rozpoczniemy od pierwszej grupy procesów. W tym celu musimy uogólnić związki materiałowe dla gazów, co jest przedmiotem następnych paragrafów. Dodatkowo trzeba rozważyć własności powierzchni rozdzielającej fazę cieczy od fazy pary, co robimy poniżej.

Rozważmy mały obszar  $\mathcal{P}$  przez który przechodzi powierzchnia kontaktu fazy ciekłej i fazy gazowej. Dla uproszczenia rozważamy jedynie procesy na tyle powolne, że można pominąć ruch tej powierzchni, jak również energię kinetyczną obu faz.



Rys. 27: Powierzchnia kontaktu (interface) między dwoma fazami

Napiszmy dla obszaru  $\mathcal P$  równania zachowania masy i energii. Mają one postać

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oint_{\partial \mathcal{P}} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial t} dV + \oint_{\partial \mathcal{P}} \rho \varepsilon \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS = -\oint_{\partial \mathcal{P}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} + p \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS,$$
(235)

gdzie  $\rho$  jest gęstością masy wody lub pary, w zależności od wyboru punktu w obszarze  $\mathcal{P}$ , w oznacza prędkość cząstek (ze względu na oznaczenie przez v objętości względnej odstępujemy tu chwilowo od oznaczenia  $\mathbf{v}$  dla prędkości),  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem prostopadłym do powierzchni  $\partial \mathcal{P}$  w danym punkcie,  $\varepsilon$  oznacza gęstość energii wewnętrznej na jednostkę masy,  $\mathbf{q}$  jest wektorem strumienia ciepła, a p ciśnieniem w wodzie lub parze, znów w zależności od wyboru punktu powierzchni. Oczywiście, prawa strona równania dla energii określa zmianę energii w obszarze na skutek przewodnictwa cieplnego i na skutek pracy sił mechanicznych, w naszym przypadku ciśnienia.

Powyższe związki muszą zachodzić dla dowolnych obszarów, a więc również w granicy dla bardzo małych obszarów, których objętość zmierza do zera. Wtedy wkład pochodnych czasowych znika i otrzymujemy następujące związki dla każdego punktu powierzchni

$$\rho'w' = \rho"w",$$

$$\rho'\varepsilon'w' + q' + p'w' = \rho"\varepsilon"w" + q" + p"w",$$
(236)

gdzie (...)' oznacza wartość na powierzchni od strony wody, a (...)" – od strony pary.  $q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  i  $w = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$  są rzutami wektorów  $\mathbf{q}$  i  $\mathbf{w}$  na kierunek jednostkowego wektora  $\mathbf{n}$ , prostopadłego do powierzchni rozdziału faz.

Łącząc powyższe związki otrzymujemy

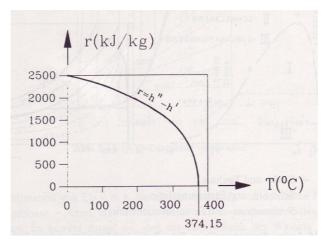
$$r = \frac{q" - q'}{\rho w} = h' - h", \quad h' = \varepsilon' + \frac{p'}{\rho'}, \quad h" = \varepsilon" + \frac{p"}{\rho"},$$
 (237)

gdzie  $\rho w$  ma taką samą wartość dla obu faz i oznacza transport masy przez powierznię na jednostkę powierzchni i czasu [kg/m²s]. h', h" są, oczywiście, entalpiami właściwymi, odpowiednio, wody i pary. Wielkości te są mierzalne i przykładowe ich wartości zawiera Tabela 19. Wielkość r, która jest wynikiem przemiany fazowej nazywamy ciepłem parowania (lub ukrytym). Wyznacza ono, jak wynika ze wzoru (237) nieciągłość strumienia ciepła na powierzchni rozdziału faz. Jest ono również stabelaryzowane dla różnych przemian fazowyh (por. Tabela 19).

Jak zobaczymy dalej, w momencie przejścia fazowego (parowania lub skraplania) ciśnienie – tzw. ciśnienie pary wodnej nasyconej, jest jedynie funkcją temperatury. Dlatego w Tabeli podajemy wartości ciśnienia, objętości właściwej wody  $v'=1/\rho'$  i pary wodnej  $v''=1/\rho''$  w funkcji temperatury.  $\vartheta$  jest temperaturą w skali Celsjusza.

**Tabela 19:** Ciśnienie pary wodnej nasyconej, objętości właściwe wody i pary wodnej, entalpie wody i pary wodnej i ciepło parowania w funkcji temperatury  $\vartheta = T - 273^{0} \text{K}^{8}$ 

$\vartheta$ [ $^{0}$ C]	p [bar]	$v'  [\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}]$	v" [m <sup>3</sup> /kg]	<i>h</i> ′ [kJ/kg]	h" [kJ/kg]	r [kJ/kg]
0,01	0,006112	1,0002	206,2	0,00	2501,6	2501,6
5	0,008718	1,0000	147,2	21,01	2510,7	2489,7
50	0,12335	1,0121	12,05	209,26	2592,2	2382,9
100	1,0133	1,0437	1,673	419,1	2676,0	2256,9
150	4,760	1,0908	0,3924	632,2	2745,4	2113,2
200	15,760	1,1565	0,1272	852,4	2790,9	1938,5
250	39,776	1,251	0,05004	1085,8	2800,4	1714,6
300	85,927	1,404	0,02165	1345,0	2751,0	1406,0
374,15	221,20	3,17	0,00317	2107,4	2107,4	0,0



Rys. 28: Ciepło parowania wody r w funkcji temperatury w skali Celsjusza

 $<sup>^8</sup>$ szczegółowe dane można znaleźć w Tablicy NA.3 normy PN-EN ISO 6946:1999

Zmiany ciepła parowania wraz ze zmianą temperatury przedstawiono na Rys. 28. Punkt końcowy w Tabeli 19 i na wykresie:  $\vartheta = 374,15^{\circ}\text{C}$  odpowiada tzw. punktowi krytycznemu wody, który przedstawiamy dalej.

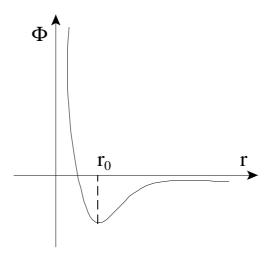
## 6.2 Równanie van der Waalsa, przemiany fazowe

Termiczne równanie stanu gazu idealnego

$$pv = \frac{R}{M_r}T,\tag{238}$$

gdzie p jest ciśnieniem gazu, T – temperaturą absolutną, v – objętością właściwą, R – uniwersalną stałą gazową, a  $M_r$  – względną masą molekularną, jest zbyt uproszczone, aby opisać takie przejścia fazowe, jak parowanie wody, czy też skraplanie pary wodnej. Widać to, na przykład, na izotermach, które mają charakterystyczny, hiperboliczny przebieg  $(p \sim 1/v)$ .

Van der Waals zaproponował uogólnienie termicznego równania stanu przez uwzględnienie oddziaływania cząstek. Przebieg mikroskopowego potecjału oddziaływań dla cząstek ktore można modelować jako punkty materialne (bez struktury!) ma jakościowo zawsze taki charakter i przedstawia go poniższy rysunek. Pochodna tego potencjału względem odległości między dwoma punktami r jest ujemna dla sił odpychających (dla  $r < r_0$ ) i dodatnia dla sił przyciągających (tzn. dla  $r > r_0$ ). Przykładowo, taki przebieg mają najczęściej używane potencjały Lenarda-Jonesa lub Morse'a. Oznacza to, że cząstki nie mogą się zbytnio do siebie zbliżyć, co wymaga wprowadzenia do modelu gazu minimalnej objętości właściwej. Oznacza się ją zwykle przez b. Z drugiej strony przyciąganie cząstek odległych oznacza, że ciśnienie cząstek na ścianki naczynia, które jest skutkiem przekazywania przez cząstki energii kinetycznej na ściankę, musi być pomniejszone, bo działanie na ścianki jest osłabiane przez przyciąganie przez cząstki wewnątrz naczynia. Odpowiedni parametr oznacza się przez a.

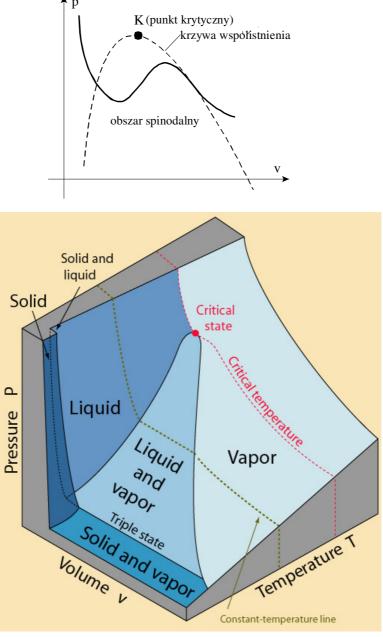


Rys. 29: Potencjał oddziaływania (schematycznie) dwóch punktów w funkcji ich odległości

Zmodyfikowane w ten sposób równanie stanu ma następującą postać

$$p = \frac{\frac{R}{M_r}T}{v-b} - \frac{a}{v^2}. (239)$$

Przebieg tej zależności jest schematycznie przedstawiony na Rys. 30. Na górnym rysunku przedstawion izotermę (stała temperatura), a na dolnym przebieg ciśnienia w funkcji objętości i temperatury.



Rys. 30: Szkic fazowy dla relacji van der Waalsa

Jak widać, izotermy nie są monotoniczne co, jak zobaczymy, prowadzi do przejść fazowych. Ze wzrostem temperatury obszar niemonotoniczności maleje do zera. Znika on

całkowicie dla izoterm leżących powyżej izotermy stycznej do krzywej, zaznaczonej przerywaną linią na Rys. 30 (krzywa współistnienia). Punkt styczności izotermy granicznej nazywa się punktem krytycznym K. Poniżej omawiamy problem wyznaczania obszaru ograniczonego tą krzywą. Nazywamy go obszarem spinodalnym.

Określenie położenia punktu krytycznego jest oparte na dwóch zależnościach, wynikających z faktu, że punkt krytyczny jest punktem przegięcia izotermy, i w związku ze zlewaniem się w tym punkcie minimum i maksimum ciśnienia styczna do izotermy musi być w tym punkcie pozioma. A więc mamy dwa związki

$$\frac{\partial p}{\partial v}\Big|_{K} = 0, \quad \frac{\partial^{2} p}{\partial v^{2}}\Big|_{K} = 0.$$
 (240)

Po podstawieniu (239) otrzymujemy

$$\frac{\frac{R}{M_r}T_K}{(v_K - b)^2} + \frac{2a}{v_K^3} = 0, \quad 2\frac{\frac{R}{M_r}T_K}{(v_K - b)^3} - \frac{6a}{v_K^4} = 0, \tag{241}$$

a stąd wynika

$$v_K = 3b, \quad p_K = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2}, \quad \frac{R}{M_r} T_K = \frac{8}{27} \frac{a}{b}.$$
 (242)

Podstawienie tych zależności do (239) daje związek

$$\left(\frac{p}{p_K}\right) = \frac{8\left(\frac{T}{T_K}\right)}{3\left(\frac{v}{v_K}\right) - 1} - 3\frac{1}{\left(\frac{v}{v_K}\right)^2}.$$
(243)

Oznacza to, że termiczne równanie van der Waalsa dla unormowanego ciśnienia, temperatury i objętości właściwej nie zawiera już żadnych parametrów materiałowych. O takim równaniu mówimy, że jest uniwersalne – jest ono takie samo dla każdej substancji. Ta własność równania van der Waalsa powoduje, że rzeczywiste gazy spełniają je wyłącznie jakościowo i to ze znacznymi odchyleniami. Poniżej omawiamy te odchylenia dla wody. Mimo tej wady równanie van der Waalsa odgrywa ważną rolę w poglądowym przedstawieniu procesów przejść fazowych.

W obszarze spinodalnym izotermy zawierają odcinek z dodatnią pochodną ciśnienia względem objętości właściwej. Oznacza to, że ciśnienie rośnie wraz ze wzrostem objętości substancji. Takie zachowanie jest zabronione przez warunek termodynamicznej stabilności. Musimy wyeliminować ten odcinek z równania stanu przez dodatkowy argument. Otrzymuje się go również z termodynamiki rozważając ponownie zasadę zachowania energii (235). Dodatkowo musimy wykorzystać równanie bilansu entropii

$$\int_{\mathcal{P}} \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} dV + \oint_{\partial \mathcal{P}} \rho \eta \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{\partial \mathcal{P}} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\mathcal{P}} \hat{\eta} dV, \tag{244}$$

gdzie  $\eta$  jest gęstością entropii na jednostkę masy, a  $\hat{\eta}$  oznacza gęstość produkcji entropii (nieodwracalną część przyrostu entropii). Po przejściu do granicy w ten sam sposób, jak to zrobiliśmy dla bilansu energii otrzymujemy na powierzchni rozdzielającej fazy następujący związek

$$\rho w T (\eta" - \eta') = q' - q", \tag{245}$$

gdzie skorzystaliśmy z ciągłości temperatury na powierzchni (T = T' = T") i z ciągłości transportu masy  $(236)_1$ . Biorąc pod uwagę drugi ze związków  $(236)_2$  otrzymujemy

$$\psi" - \psi' = p(v' - v"), \quad \psi' = \varepsilon' - T\eta', \quad \psi" = \varepsilon" - T\eta", \tag{246}$$

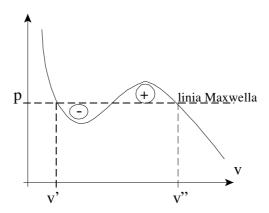
gdzie skorzystano z warunku równowagi mechanicznej na powierzchni rozdziału faz (równanie bilansu pędu): p = p' = p". Oczywiście,  $\psi'$  i  $\psi$ " są wartościami energii swobodnej Helmholtza w stanach v' i v". Jednocześnie, na podstawie związku termodynamicznego (22) mamy

$$p = -\frac{\partial \psi}{\partial v} \implies \int_{v'}^{v''} p(v, T) dv = p(v'' - v'), \qquad (247)$$

gdzie p pod znakiem całki jest zadane termicznym równaniem van der Waalsa. Powyższy związek ma prostą interpretację geometryczną, zilustrowaną na Rys. 31.

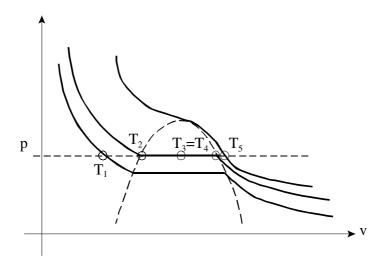
Całka po lewej stronie powyższego wzoru określa geometrycznie pole powierzchni pod izotermą, natomiast prawa strona wzoru określa pole prostokąta między punktami v' i v". Oznacza to, że ciśnienie p musi być tak wybrane, by pola oznaczone "-" i "+" były równe. Taka linia stałego ciśnienia nazywa się liniq Maxwella. Wyznacza ona linię zastępującą izotermę van der Waalsa w obszarze spinodalnym i, tym samym, określa zakres obszaru spinodalnego.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że przy powyższej konstrukcji wykorzystaliśmy fakt, że na powierzchni kontaktu faz nie ma produkcji entropii. Z tego powodu linia Maxwella jest również nazywana linią *równowagi fazowej*. W przyrodzie występują również procesy przemian fazowych, które nie przebiegają po linii równowagi fazowej. Ma to zwłaszcza miejsce w ciałach stałych. Zamiast izoterm typu van der Waalsa powstają wtedy pętle histerezy.



Rys. 31: Szkic do konstrukcji Maxwella

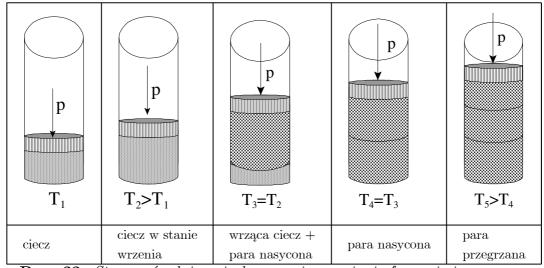
Przystępujemy do opisu przemiany fazowej woda – para wodna, w którym wykorzystamy omówione powyżej własności izoterm z konstrukcją linii Maxwella.



Rys. 32: Schemat izobarycznej przemiany fazowej ciecz – para.

Rozpatrzmy najpierw proces izobaryczny, którego punktem początkowym jest ciecz w temperaturze  $T_1$  (por. Rys. 33). Podgrzewając ciecz do temperatury  $T_2$  przechodzimy na izotermę, dla której punkt o ciśnieniu p jest punktem początkowym przemiany fazowej. W tym punkcie ciecz wrze. Nie zmieniając temperatury ( $T_2 = T_3 = T_4$ ) i ciśnienia możemy się przesuwać po linii Maxwella do punktu końcowego tej linii, w którym w naczyniu znajduje się już wyłącznie para nasycona. We wszystkich punktach pośrednich naczynie zawiera mieszaninę cieczy wrzącej i pary nasyconej. Od punktu końcowego linii Maxwella temperatura może być znów podwyższana. Na kolejnej izotermie, odpowiadającej temperaturze  $T_5 > T_4$  w naczyniu znajduje się wyłącznie para przegrzana.

Odwrotny proces przemiany fazowej, tzn. proces chłodzenia pary rozpoczyna się w punkcie o temperaturze  $T_4$ . Ten punkt nazywamy punktem rosy, gdyż pojawiają się w nim po raz pierwszy krople wody, powstałe przez kondensację pary.



Rys. 33: Stany pośrednie w izobarycznej przemianie fazowej ciecz – para.

W podobny sposób można skonstruować, na przykład, izotermiczny proces kondensacji cieczy, który przechodzi przez stany wrzącego płynu, mieszaniny wrzącego płynu i pary nasyconej, pary nasyconej, aż do pary przegrzanej w stanie końcowym, w którym ciśnienie jest mniejsze od ciśnienia Maxwella wybranej izotermy.

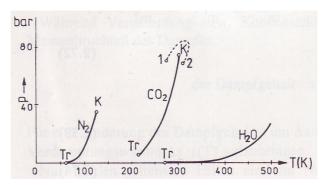
Powstaje pytanie jak są charakteryzowane stany, które leżą na linii Maxwella. Jak już wspominaliśmy, w tych punktach układ jest mieszaniną obu faz. Zawartość pary charakteryzuje jej masa w naczyniu m", podczas gdy masa cieczy wynosi m'. Całkowita masa m = m' + m" nie ulega zmianie. Można więc wprowadzić pojęcie względnej zawartości pary

$$x = \frac{m"}{m} \implies v = (1 - x)v' + xv", \tag{248}$$

 $(V=V'+V") \Rightarrow V/m=V'/m'\cdot m'/m+V"/m"\cdot m"/m)$ , które określa, na przykład, energię wewnętrzną i entalpię w punktach pośrednich linii Maxwella

$$\varepsilon = (1 - x)\varepsilon' + x\varepsilon'', \quad h = (1 - x)h' + xh''. \tag{249}$$

Tym samym, w obszarze przejścia fazowego dla ustalonej temperatury T zmienną stanu staje się udział fazowy pary x zamiast ciśnienia p, które jest stałe w czasie przemiany: p(T).



Rys. 34: Krzywe ciśnienia pary nasyconej dla trzech gazów

Zauważmy na zakończenie analizy modelu van der Waalsa, że położenie linii Maxwella określa dla danej substancji funkcja p(T). Jest ona stabelaryzowana i na Rys. 34 przedstawiamy trzy jej przykłady (por. Tabela 19). Można również stosować wzory półempiryczne. Dla temperatur, pojawiających się typowo w fizyce budowli można, na przykład, korzystać z jednego z następujących wzorów

#### 1. wzór A. L. Buck'a

$$p'(\vartheta) = 611, 21 \cdot \exp\left\{\left(18, 678 - \frac{\vartheta}{234, 5}\right) \frac{\vartheta}{257, 14 + \vartheta}\right\},$$
 (250)

#### 2. wzór Boltona

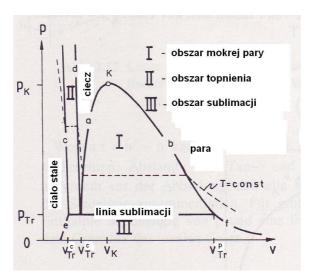
$$p'(\vartheta) = 611, 2 \cdot \exp\left\{17, 67 \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta + 243, 5}\right\},\tag{251}$$

gdzie temperatura  $\vartheta$  jest w stopniach Celsiusza, a ciśnienie – w paskalach.

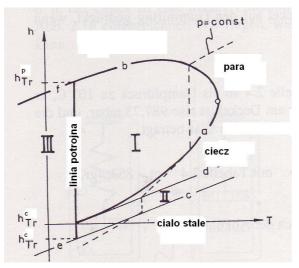
## 6.3 Granice faz

Przedstawiona analiza równania van der Waalsa nie wyczerpuje problemu przejść fazowych. Poza parowaniem i skraplaniem istnieje obszar topnienia i zamarzania, który nie jest opisywany równaniem dla stanów ciekłych. Na poniższych Rysunkach 35-37 przedstawiono schematycznie granice różnych faz, typowe dla prawie wszystkich substancji. Oznaczenia

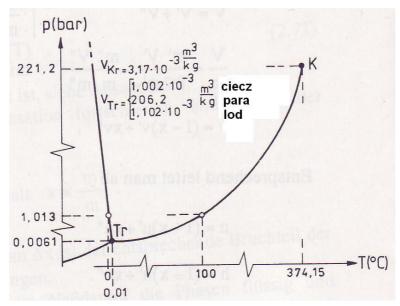
- a,b linie wrzenia i parowania,
- c,d linie topnienia i zamarzania,
- e,f linie sublimacji i desublimacji.



**Rys. 35:** Schemat linii rozdziału faz na płaszczyźnie (p, v).



Rys. 36: Linie rozdziału faz dla entalpii w funkcji temperatury.



Rys. 37: Granice fazowe dla wody

Szczególnie istotne w fizyce budowli są okolice tzw. punktu potrójnego, w którym substancja może występować jednocześnie we wszystkich trzech stanach skupienia: pary, cieczy i ciała stałego.

## 6.4 Mokre powietrze

Nienasycone mokre powietrze jest mieszaniną powietrza i pary wodnej. Obydwa składniki traktuje się jak gazy idealne. Dla pary wodnej stosuje się równanie gazu idealnego aż do punktu rosy , gdzie para staje się nasycona i zaczyna się kondensacja. Punkt ten występuje, jak wiemy, dla danej temperatury T, gdy ciśnienie pary wodnej osiąga wartość p=p(T), omawianą już powyżej. Nasycone mokre powietrze składa się z powietrza, nasyconej pary wodnej i ciekłej wody w postaci kropelek, które tworzą mgłę, chmury lub osadzają się w postaci kropli na ściankach.

Mokre powietrze jest charakteryzowane wilgotnością. Jedna z możliwych definicji wilgotności ma postać

$$\xi = \frac{m_W}{m_P},\tag{252}$$

gdzie  $m_W$  jest całkowitą masą wody (ciekłej i w postaci pary), a  $m_P$  – masą powietrza. Jeśli para jest nasycona, ale mieszanina nie zawiera wody w postaci cieczy, to wilgotność jest wilgotnością nasycenia

$$\xi' = \frac{m_G'}{m_P},\tag{253}$$

gdzie  $m'_G$  jest maksymalną ilością pary wodnej, która może być zawarta w powietrzu bez występowania w nim ciekłej wody.

Własności powietrza zawierającego parę wodną charakteryzuje entalpia. Podobnie jak energia wewnętrzna zawiera ona dowolną stałą, której wartość przyjmuje się tak, by była równa zero w temperaturze 0°C. Wtedy obowiązują następujące związki dla nienasyconego

i nasyconego mokrego powietrza

$$H = m_P c_p^P \vartheta + m_G \left( r_0 + c_p^G \vartheta \right), \quad \vartheta = T - 273, 15 \quad [^{0}C],$$
  

$$H^s = m_P c_p^P \vartheta + m_G' \left( r_0 + c_p^G \vartheta \right) + m_C c^C \vartheta. \tag{254}$$

W tych związkach  $c_p^P$ ,  $c_p^G$  oznaczają ciepło właściwe powietrza i pary wodnej przy stałym ciśnieniu,  $c^C$  jest ciepłem właściwym ciekłej wody, a  $m_C$  – jej masą,  $r_0$  oznacza ciepło parowania wody w temperaturze  $0^0$ C. Wielkości te mają następujące wartości

$$c_p^P = 1 \quad \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right], \quad c_p^G = 1,86 \quad \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right], \quad c^C = 4,18 \quad \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}} \right], \quad r_0 = 2500 \quad \left[ \frac{\text{kJ}}{\text{kg}} \right]. \quad (255)$$

Zwykle w termodynamice wilgotnego powietrza wprowadza się gęstości odniesione do masy powietrza

$$h_{1+\xi} = \frac{H}{m_P} = \frac{m}{m_P} \frac{H}{m} = \frac{m_P + m_W}{m_P} h = (1+\xi) h.$$
 (256)

Wtedy

$$h_{1+\xi} = c_p^P \vartheta + \xi \left( r_0 + c_p^G \vartheta \right),$$

$$h_{1+\xi}^s = c_p^P \vartheta + \xi' \left( r_0 + c_p^G \vartheta \right) + \left( \xi - \xi' \right) c^C \vartheta,$$

$$(257)$$

lub po połączeniu tych związków

$$h_{1+\xi}^s = h_{1+\xi} + (\xi - \xi') c^C \vartheta.$$
 (258)

W Tabeli 20 podajemy kilka wartości entalpii nasyconego powietrza w funkcji temperatury przy ciśnieniu powietrza  $p_0=1$  bar.

**Tabela 20:** Ciśnienie nasyconej pary wodnej p', wilgotność nasycenia i entalpia nasyconego powietrza w funkcji temperatury.  $p_0 = 1$  bar.

$\vartheta$	p <b>'</b>	$\xi'$	$h_{1+\xi'}$
$^{0}\mathrm{C}$	mbar	g/kg	kJ/kg
0	6,107	3,822	9,56
5	8,719	5,471	18,76
10	12,271	7,727	29,52
15	17,041	10,783	42,35
20	23,37	14,88	57,88
25	31,66	20,34	75,95
30	42,42	27,55	100,62
35	56,22	37,05	130,3
40	73,75	49,52	167,8

Wilgotność powietrza mona definiować w różny sposób. W meteorologii wprowadza się stopień nasycenia, określony związkiem

$$\psi\left(\xi,\vartheta\right) = \frac{\xi}{\xi'(\vartheta)} \cdot 100\%. \tag{259}$$

Wielkość ta określa zawartość wody w nienasyconym powietrzu odniesioną do maksymalnej ilości wody, którą w postaci pary w danej temperaturze może przyjąć powietrze. Wielkość ta jest, oczywiście, zależna od temperatury. Na przykład (por. powyższa Tabela), dla  $\xi=0,01$  w temperaturze  $\vartheta=20^{0}\mathrm{C}$  mamy  $\psi=67\%$ , a dla tego samego  $\xi$  w temperaturze  $\vartheta=25^{0}\mathrm{C}-\psi=49\%$ .

Wprowadza się również pojęcie wilgotności względnej, którą definiuje się następująco

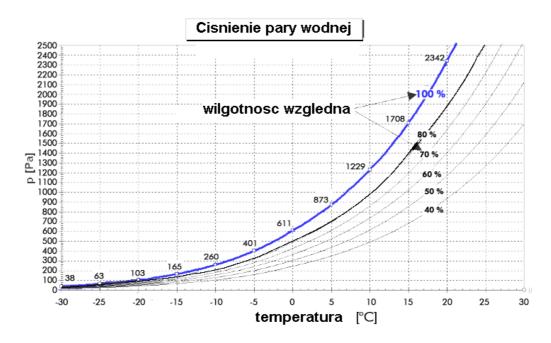
$$\varphi\left(\xi,\vartheta\right) = \frac{p}{p'\left(\vartheta\right)} \cdot 100\%,\tag{260}$$

gdzie p jest ciśnieniem pary, a p' – ciśnieniem w stanie nasycenia.  $\varphi$  i  $\psi$  posiadają liczbowo prawie te same wartości. Ta definicja wilgotności względnej jest zwykle przyjmowana w normach budowlanych (np.: PN-EN ISO 6946:1999, wzôr (NA.4)).

W Tabeli 21 podajemy zalecenia normowe w odniesieniu do projektowych wartości wilgotności względnej.

**Tabela 21:** Obliczeniowa wilgotność powietrza w pomieszczeniach (Tablica NA.2 w.w. normy)

Rodzaj pomieszczenia	Wilgotność względna $\varphi$
Pomieszczenia w budynkach użyteczności publicznej	
i produkcyjnych, w których nie wydziela się para wodna	45%
z otwartych zbiorników i nie stosuje się nawilżania	
Pomieszczenia mieszkalne (w tym pokoje, kuchnie, łazienki,	
WC), pokoje chorych w szpitalach i sanatoriach, pokoje	55%
dziecięce w żłobkach i przedszkolach	
W innych pomieszczeniach	na podstawie założeń technologicznych



Rys. 38: Zależność ciśnienia pary wodnej od temperatury dla różnych poziomów wilgotności

Czasami przyjmuje się jako miarę nasycenia punkt rosy  $\vartheta_R$ . Jest on określony jako temperatura, przy której następuje kondensacja pary o wilgotności  $\xi$ . Na przykład, na podstawie przytoczonej powyżej Tabeli 21, dla  $\xi=0.005471$  punkt rosy wynosi  $\vartheta_R=5^{0}$ C, a dla  $\xi=0.010783-\vartheta_R=15^{0}$ C. Dane przeliczeniowe dla punktu rosy są również ztabelaryzowane w normie (Tablica NA.3).

W wyniku zastosowania definicji (260) otrzymuje się krzywe zależności ciśnienia pary wodnej od temperatury w zależności od poziomu wilgotności. Krzywe te przedstawiono na Rys. 38.

## 6.5 Dyfuzja w przegrodach

### 6.5.1 Jednowymiarowe problemy dyfuzji w przegrodach budowlanych

Podstawą opisu dyfuzji pary wodnej w przegrodach budowlanych są równania bilansu masy i pędu dla pary wodnej jako składnika mieszaniny para-przegroda (traktowana jako sztywny materiał porowaty). Przyjmuje się, że przegroda (szkielet materiału porowatego) jest nieruchoma, a efekty przyspieszenia w ruchu pary są pomijalne. Dla dowolnego obszaru  $\mathcal{P}$  równania bilansu mają wtedy postać

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \rho_G}{\partial t} dV = -\oint_{\partial \mathcal{P}} \rho_G \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{n} dS, \tag{261}$$

$$-\oint_{\partial \mathcal{D}} p_G \mathbf{n} dS - \int_{\mathcal{D}} \pi \mathbf{v}_G dV = 0, \qquad (262)$$

gdzie  $\rho_G$  jest parcjalną gęstością pary wodnej,  $\mathbf{v}_G$  jest prędkością tego składnika względem przegrody (tzw. szkieletu),  $p_G$  jest ciśnieniem parcjalnym pary,  $\pi$  [Pa·h/m<sup>2</sup>] jest wspóczynnikiem materiałowym, tzw. przepuszczalnością materiału porowarego (ang. permeability coefficient).

W fizyce budowli rozpatruje się zwykle jednowymiarowe stacjonarne procesy transportu pary w kierunku x prostopadłym do przegrody. Wtedy równanie bilansu masy można napisać w postaci

$$i = \rho_G v_G = \text{const.}, \quad i = \frac{\dot{m}}{A}$$
 (263)

gdzie  $\dot{m}$  [kg/h] jest strumieniem masy przez przegrodę na jednostkę czasu, A jest dla przedród o stałej grubości połową powierzchni obszaru  $\mathcal{P}$  w kierunku prostopadłym do osi x, tzn. powierzchnią przez którą wnika lub wypływa para. i [kg/m²h] jest tzw. gęstością  $strumienia\ masy$  i, na podstawie równania bilansu masy w przypadku stacjonarnym:  $\frac{\partial \rho_G}{\partial t} = 0$ , jest ona określona przez  $\rho_G v_G$  na powierzchni przegrody.

Z drugiej strony, równanie bilansu pędu w postaci lokalnej i dla procesów izotermicznych można przekształcić następująco

$$-\operatorname{grad} p_G - \pi \mathbf{v}_G = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{\partial p_G}{\partial \rho_G} \frac{d\rho_G}{dx} - \pi v_G = 0,$$

tzn.

$$i = -D\frac{d\rho_G}{dx}, \quad D = \frac{\rho_G}{\pi} \frac{\partial p_G}{\partial \rho_G},$$
 (264)

gdzie D [m²/h] oznacza tzw. współczynnik dyfuzji. W przypadku ruchu gazu (pary wodnej) w mieszaninie gazów (np. w powietrzu) powyższe równanie nazywa się pierwszym prawem Ficka. Określa ono gęstość strumienia masy na skutek adwekcji, tzn. ruchu względnego w mieszaninie gazów. W przypadku dyfuzji gazu przez ośrodek porowaty związek ten nazywa się prawem Darcy'ego.

Przy projektowaniu przegród budowlanych stosuje się zwykle bezpośrednio równanie (264)<sub>1</sub> dla gradientu ciśnienia. Gęstość strumienia masy można określić bezpośrednio z tego równania, gdyż w przypadku stacjonarnym jest ona stała (por. prawo Fourier'a dla przewodnictwa cieplnego przez przegrody!). Mianowicie

$$-\frac{dp_G}{dx} - \frac{\pi}{\rho_G}i = 0 \quad \Rightarrow \quad i = \frac{p_G^1 - p_G^2}{1/\Delta}, \quad \frac{1}{\Delta} = \frac{\pi d}{\rho_G}, \tag{265}$$

gdzie d jest grubością przegrody, a  $1/\Delta$  [Pa·h·m²/kg] jest oporem dyfuzyjnym dla pary wodnej. Opór ten można scharakteryzować przy pomocy tzw. współczynników oporu dyfuzyjnego  $\mu$ 

$$\mu = \frac{D_{\text{powietrze}}}{D_{\text{material porowaty}}},\tag{266}$$

którego przykładowe wartości są podane w Tabeli 22.

**Tabela 22:** Współczynnik oporu dyfuzyjnego dla pary wodnej

Materiał	$\mu$
powietrze	1
zaprawa cementowa	15/35
zaprawa gipsowa	10
beton	70/150
beton gazowany	5/10
płyty gipsowe	8
cegła klinkerowa	50/100
cegła	5/10
pianka poliuretanowa	30/100
wełna mineralna	1
polistyrol	30/70
drewno naturalne	40
izolacja bitumiczna	10000/80000
folia polietylenowa	100000

Przy pomocy współczynników oporu dyfuzyjnego wprowadza się grubości zredukowane przegród (równoważne grubości warstw powietrza)

$$s_d = \mu d, \tag{267}$$

gdzie d jest rzeczywistą grubością przegrody. Opór dyfuzyjny dla pary wodnej jest wtedy opisywany zależnością

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\delta} \sum_{i=1}^{n} s_{di} = \frac{1}{\delta} \left( \mu_1 d_1 + \dots + \mu_n d_n \right), \quad \frac{1}{\delta} = 1.5 \cdot 10^6 \text{ [m · h · Pa/kg]}, \quad (268)$$

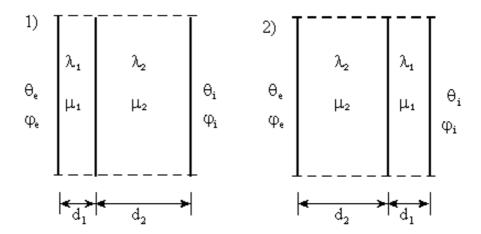
$$\Rightarrow \quad \pi = \frac{\rho_G}{\delta} \mu.$$

Tabela 23: Porównanie przewodnictwa cieplnego i transportu wilgotności

Ciepło (sztywny przewodnik)	Wilgotność (dyfuzja)
θε	p <sub>e</sub> i
Bilans energii  przypadek niestacjonarny: $\int_{\mathcal{P}} \rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} dV + \oint_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ prawo Fouriera $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$	
$\frac{przypadek\ stacjonarny:\ \frac{\partial T}{\partial t} = 0}{\text{Ilość ciepła}\ Q\ [J]}$ Strumień ciepła $\dot{Q} = Q/t\ [W]$	$\frac{przypadek\ stacjonarny:\ \frac{\partial \rho_G}{\partial t} = 0}{\text{Dyfundująca masa}\ m\ [kg]}$ Strumień masy $\dot{m} = m/t\ [kg/h]$
Gęstość strumienia ciepła $q = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \dot{Q}/A \left[ \mathbf{W}/\mathbf{m}^2 \right]$ $q = \frac{r \circ \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n}}{o \circ \dot{\mathbf{r}} \cdot cieplny}$ Opór dla ciepła przejmowanego $1/\alpha \left[ \mathbf{m}^2 \mathbf{K}/\mathbf{W} \right]$	Gęstość strumienia masy $i = \rho_G \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{n} = \dot{m}/A \left[ \text{kg/h} \cdot \text{m}^2 \right]$ $i = \frac{\text{różnica ciśnień parcjalnych}}{\text{opór dyfuzyjny}}$ Opór dyfuzyjny powierzchniowy (pomijalny) $1/\beta \left[ \text{m}^2 \cdot \mathbf{h} \cdot \text{Pa/kg} \right]$
Całkowity opór cieplny $1/k = \sum d/\lambda$	Całkowity opór dyfuzyjny $1/\Delta = 1.5 \cdot 10^6 \sum_{d} s_d = (1.5 \cdot 10^6 D_{powietrze}) \sum_{d} \frac{d}{D_{mat.por.}}$

## Przykład 1.

Rozpatrzmy dwie wersje przegrody dwuwarstwowej, przedstawione na Rys. 39.



Rys. 39: Dwie przegrody o odwrotnym ustawieniu warstw

Dane wyjściowe problemu są następujące

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_e & = & -10^0 \; \mathrm{C}, & \vartheta_i = 20^0 \; \mathrm{C}, \\ \varphi_e & = & 0,95, & \varphi_i = 0,55, \\ \lambda_1 & = & 0,042 \; \mathrm{W/mK}, & \lambda_2 = 0,44 \; \mathrm{W/mK}, \\ \mu_1 & = & 30, & \mu_2 = 8. \end{array} \tag{269}$$

Problem jest stacjonarny. Należy zbadać, czy w tych dwóch przypadkach pojawia się możliwość kondensacji pary wodnej w przegrodzie.

Z Tabeli 19 odczytujemy ciśnienie pary nasycenia na ściankach zewnętrznych, a następnie obliczamy ciśnienie parcjalne pary. W obu przypadkach mamy

$$p'_{e} = 286,7 \text{ Pa}, \quad p'_{i} = 2337 \text{ Pa},$$

$$p_{Ge} = p'_{e} \cdot \varphi_{e} = 272,4 \text{ Pa}, \quad p_{Gi} = p'_{i} \cdot \varphi_{i} = 1285 \text{ Pa}.$$
(270)

Gęstość strumienia ciepła przez przegrodę jest taka sama w obu przypadkach i wynosi

$$q = \frac{30}{\frac{0.1}{0.042} + \frac{0.25}{0.44}} = 10.17 \text{ W/m}^2.$$
 (271)

Gęstość strumienia masy przez przegrodę jest również taka sama w obu przypadkach

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\delta} (30 \cdot 0, 1 + 8 \cdot 0, 25) = 7, 5 \cdot 10^{6} \text{ m}^{2} \text{hPa/kg} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = \frac{1285 - 272}{1/\Delta} = 1,35 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^{2} \text{h.}$$
(272)

Na powierzchni pomiędzy warstwami panują dla obu przypadków różne warunki. Mamy

1) 
$$\vartheta_1 = -10 + \frac{0,1}{0,042} \cdot 10,17 = 14,21^{\circ} \text{C} \implies$$
  
 $\Rightarrow p'_1 = 1619 \text{ Pa},$   
 $p_{G1} = 272,43 + 1,35 \cdot 30 \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-4} = 879,5 \text{ Pa} < p'_1,$  (273)

2) 
$$\vartheta_1 = -10 + \frac{0.25}{0.44} \cdot 10.17 = -4.22^{\circ} \text{C} \implies$$
  
 $\Rightarrow p'_1 = 447.55 \text{ Pa},$   
 $p_{G1} = 272.43 + 1.35 \cdot 8 \cdot 0.25 \cdot 1.5 \cdot 10^{6} \cdot 10^{-4} = 677.4 \text{ Pa} > p'_1.$  (274)

Oznacza to, że w pierwszej przegrodzie  $p' > p_G$  i tym samym nie pojawia się kondensacja, a w drugim przypadku linie ciśnienia pary nasyconej p' i ciśnienia parcjalnego  $p_G$  przecinają się. Tym samym pojawia się punkt, w którym  $p' = p_G$ , a to oznacza początek procesu kondensacji pary. Warunki transportu masy ulegają w tym przypadku zmianie i problem trzeba rozwiązywać odmiennie. W następnym paragrafie przedstawiamy procedurę przybliżoną konstrukcji takiego rozwiązania.

Przykład 2 (wpływ współczynnika przejmowania ciepła).

Norma przewiduje następujące wartości dla współczynnika przejmowania ciepła

- 1/
$$\alpha=0,13-0,17 \quad (\alpha=5.88-7.69)$$
dla powierzchni wewnętrznych,

- 1/
$$\alpha=0-0,17 \quad (\alpha=5,88-\infty)$$
dla powierzchni zewnętrznych.

Wartości te mogą nie być miarodajne w przypadku wymuszonej konwekcji, lub w przypadku przeszkód (np. mebli) uniemożliwiających swobodną konwekcję laminarną. W rozważanym przykładzie przyjmiemy, że na skutek przeszkód po stronie wewnętrznej przegrody mamy  $\alpha_i=0.5$  tzn. przeszkoda stanowi dodatkową izolację termiczną. Rozpatrzymy przegrodę z poprzedniego przykładu z pierwszą konfiguracją (tzn. warstwa izolacji od zewnątrz). Nie zmienia to strumienia masy, bo współczynnik przejmowania masy jest równy zero

$$i = 1,35 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^2 \text{h.}$$
 (275)

Natomiast strumień ciepła jest następujący

$$q = \frac{30}{\frac{1}{0.5} + \frac{0.1}{0.042} + \frac{0.25}{0.44}} = 6,06 \text{ W/m}^2.$$
 (276)

Temperatura na powierzchni między warstwami jest więc w tym przypadku

$$\vartheta_1 = -10 + \frac{0,1}{0,042} 6,06 = 4,43^{\circ} C \quad \Rightarrow \quad p'(\vartheta_1) = 838,1 \text{ Pa.}$$
(277)

Ponieważ ciśnienie parcjalne  $p_{G1}$  nie ulega zmianie i wynosi 879, 5 Pa w przegrodzie pojawi się kondensacja.

#### 6.5.2 Obliczanie skraplania - procedura Glasera

Procedura Glasera sluży do określenia ilości kondensatu pary wodnej w przegrodzie po określenym czasie kondensacji, jak również do określenia ilości kondensatu, który może odparować w czasie osuszania zawilgoconej przegrody.

Normy określają warunki, tzn. temperaturę wewnątrz i na zewnątrz przegrody,  $\vartheta_i$ ,  $\vartheta_e$ , wilgotność wewnątrz i na zewnątrz przegrody,  $\varphi_i$ ,  $\varphi_e$ , okres trwania kondensacji i odparowania,  $t_K$ ,  $t_P$ , w których następuje kondensacja i odparowanie kondensatu w zależności od rodzaju konstrukcji. Dla typowych konstrukcji mieszkaniowych warunki te są następujące:

1. okres kondensacji:

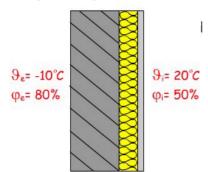
$$\vartheta_i = 20^0 \text{ C}, \quad \varphi_i = 50\%, 
\vartheta_e = -10^0 \text{ C}, \quad \varphi_e = 80\%, 
t_K = 1440 \text{ h (60 dni)},$$

2. okres odparowania kondensatu

$$\vartheta_i = 12^0 \text{ C}, \quad \varphi_i = 70\%, 
\vartheta_e = 12^0 \text{ C}, \quad \varphi_e = 70\%, 
t_K = 2160 \text{ h (90 dni)}.$$

Omówimy szczegółowo pierwszy problem – powstawanie kondensatu. Problem drugi rozwiązuje się łatwo w sposób analityczny i przykład takiego obliczenia omówimy dalej.

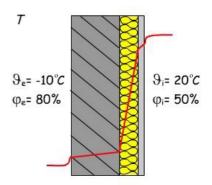
Podstawą obliczeń są warunki brzegowe dla temperatury i wilgotności względnej. Na Rys. 40 podano przykład takich warunków, zgodnych z normą.



Rys: 40: Warunki brzegowe

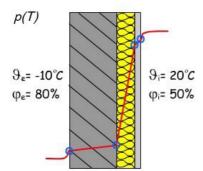
Obliczenia wykonuje się w następujących krokach.

1) Dla zadanej struktury przegrody określić temperaturę na granicach warstw:



Rys. 41: Rozkład temperatury

2) Na podstawie Tabeli 19 lub wzoru empirycznego określić ciśnienie nasycenia  $p'=p\left(T\right)$ na granicach warstw



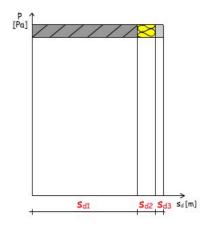
Rys. 42: Rozkład temperatury

3) Z definicji wilgotności względnej określić ciśnienie parcjalne na granicach zewnętrznych przegrody

$$p_{Gi} = p_i' \varphi_i, \quad p_{Ge} = p_e' \varphi_e.$$

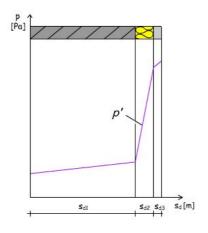
4) Wykorzytując współczynniki oporu dyfuzyjnego  $\mu$ znaleźć równoważne grubości warstw powietrza dla warstw rzeczywistych

$$s_d = \mu d. (278)$$



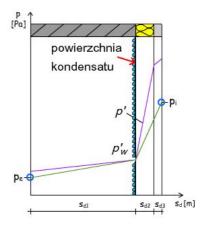
Rys. 43: Grubości zastępczych warstw powietrza

5) Na szkicu warstw zastępczych sporządzić wykres krzywej nasycenia p'



Rys. 44: Wykres krzywej nasycenia

6) Przy pomocy współczynników oporu dyfuzyjnego i obliczonych ciśnień na powierzchniach przegrody określić krzywą parcjalnych ciśnień



Rys. 45: Rozkład ciśnień do transportów masy

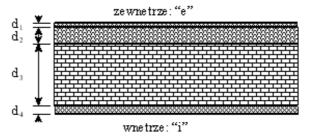
7) Obliczyć ilość kondensatu

$$i_i = \frac{p_i - p'_w}{1/\Delta_i}, \quad i_e = \frac{p'_w - p_e}{1/\Delta_e},$$

$$W_T = t_T (i_i - i_e), \qquad (279)$$

gdzie  $p_w'$  jest wartością ciśnienia w punkcie przecięcia obu linii ciśnień (płaszczyzna kondensacji),  $1/\Delta_e$ ,  $1/\Delta_i$  jest oporem dyfuzyjnym, odpowiednio między płaszczyzną zewnętrzną i płaszczyzną kondensacji oraz płaszczyzną wewnętrzną i płaszczyzną kondensacji,  $W_T$  jest ilością kondensatu, a  $t_T$  – czasem kondensacji.

Przykład: Rozpatrzmy przykład przegrody przedstawionej na Rys. 46.



Rys. 46: Przykład przegrody do obliczeń kondensacji (Uwaga: w przykładzie została zamieniona warstwa 2 i 3!)

W Tabeli 24 zestawiono dane charakteryzujące tą konstrukcję, jak również obliczone opory cieplne i grubości równoważnych warstw powietrza.

Tabela 24: Dane do przykładu na metodę Glasera

		grubość $d$ [m]	przew. ciepl. $\lambda \; [\mathrm{W/mK}]$	$\mu$	$d/\lambda \; [\mathrm{m^2K/W}]$	$s_d = \mu d$ [m]
е					$1/\alpha_e = 0.04$	
1	tynk zewnętrzny	0,02	0,87	25	0,023	0,5
2	cegła	0,25	0,44	40	0,568	10
3	ocieplenie	0,1	0,042	30	2,381	3
4	tynk wewnętrzny	0,01	0,70	8	0,014	0,08
i					$1/\alpha_i = 0.125$	

A więc całkowita grubość przegrody wynosi 0,38 m, a całkowity opór cieplny R=3,151 [m<sup>2</sup>K/W], poczas gdy całkowity opór dyfuzyjny  $1/\Delta=1,5\cdot 10^6\sum s_d=20,37\cdot 10^6$  [m<sup>2</sup>hPa/kg]. Rozpatrzymy warunki brzegowe, przedstawione uprzednio jako przykład w opisie procedury Glasera, tzn.

$$\vartheta_e = -10^0 \,\mathrm{C}, \quad \vartheta_i = 20^0 \,\mathrm{C}, 
\varphi_a = 80\%, \quad \varphi_i = 50\%.$$
(280)

Wtedy gestość strumienia ciepła q wynosi

$$q = \frac{1}{R} (\vartheta_i - \vartheta_e) = 9,522 \ [\text{W/m}^2].$$
 (281)

Z zasady zachowania energii wynika, że ta gęstość pozostaje stała na całej grubości. Zgodnie ze wzorem Boltona (251) dla ciśnień pary nasyconej mamy również

$$p'_e = 286,8 \text{ Pa}, \quad p'_i = 2337 \text{ Pa} \implies p_{Ge} = 0,8 \cdot p'_e = 229,4 \text{ Pa}, \quad p_{Gi} = 0,5 \cdot p'_i = 1168,5 \text{ Pa}.$$

Oznacza to, że gestość strumienia masy bez procesu skraplania byłaby następująca

$$i = \Delta (p_{Gi} - p_{Ge}) = 4,610 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \text{h.}$$
 (282)

Na podstawie zasady zachowania masy jest ona, podobnie jak gęstość strumienia ciepła, stała na całej grubości.

Przystępujemy do konstrukcji krzywych, opisanych w procedurze Glasera. W tym celu musimy znaleźć temperaturę na granicach warstw. Wynika ona, oczywiście, ze wzoru

$$\vartheta_n = \vartheta_{n-1} + R_{n-1}q,\tag{283}$$

gdzie  $R_{n-1}$  jest oporem cieplnym w warstwie poprzedzającej granicę.

Na podstawie tych wartości temperatury znajdujemy ze wzoru Boltona (251) wartości ciśnienia pary nasyconej  $p_n'$  na tej warstwie.

Wreszcie, stosując zależność

$$p_{Gn} = p_{Gn-1} + \frac{1}{\Delta_{n-1}}i, \quad \frac{1}{\Delta_{n-1}} = \frac{1}{\delta}s_{dn-1},$$
 (284)

gdzie  $1/\Delta_{n-1}$  jest oporem dyfuzyjnym warstwy n-1, obliczamy ciśnienia parcjalne na granicach warstw.

Wyniki tych obliczeń zestawiono w Tabeli 25, gdzie granice między warstwami oznaczono e-1, 1-2, 2-3, itd..

TT 1 1 0 P	D 11 1		.,		•	•	.,	• 1
Tabela 25:	- Kozktad	temneraturu	cisnienia	narn	ทูดรมเดอกคา	1.	cisnienia	narcialneao
rabola 20.	100210000	compenatury,	Cocroon	$P^{\alpha_i}g$	readycorecj	U	Controctora	parejantego.

	$s_d$	$\vartheta$ [ $^{0}$ C]	<i>p'</i> [Pa]	$p_G$ [Pa]
е		-10	286,8	229,4
pow. zewn.: e-1		-9,619	295,5	229,4
tynk zewn./cegla: 1-2	0.5	-9,400	300,6	263,4
cegla/ocieplenie: 2-3	10	-3,992	455,3	955,5←
ocieplenie/tynk wewn.: 3-4	3	18,680	2152,5	1162,9
pow. wewn.: 4-i	0.08	18,814	2170,6	1168,5
i		20	2337	1168,5

Jest oczywiste, że linie łamane, które powstają przez połączenie powyższych punktów dla p' i dla  $p_G$  przecinają się.

Granica warstw, która występuje po punkcie przecięcia linii ciśnień jest przyjmowana jako miejsce kondensacji. W naszym przypadku jest to powierzchnia 2-3 pomiędzy cegłą i ociepleniem. Współrzędne i ciśnienie nasycenia dla tej powierzchni są następujące

$$s_{de} = 10, 5 \text{ m}, \quad s_{di} = 3,08 \text{ m},$$
 (285)  
 $p'_{w} = 455, 3 \text{ Pa}.$ 

Dla oporów dyfuzyjnych obu części otrzymujemy

$$\frac{1}{\Delta_e} = 1, 5 \cdot 10^6 \cdot 10, 5 = 15, 75 \cdot 10^6 \left[ \text{m}^2 \text{h} \cdot \text{Pa/kg} \right],$$

$$\frac{1}{\Delta_i} = 1, 5 \cdot 10^6 \cdot 3, 08 = 4, 62 \cdot 10^6 \left[ \text{m}^2 \text{h} \cdot \text{Pa/kg} \right].$$
(286)

Tym samym strumienie dyfuzyjne po lewej i po prawej stronie punktu skraplania są jak następuje

$$i_{i} = \frac{p_{Gi} - p'_{w}}{1/\Delta_{i}} = \frac{1168, 5 - 455, 3}{4, 62 \cdot 10^{6}} = 1.54 \cdot 10^{-4} \left[ \text{kg/m}^{2} \text{h} \right],$$

$$i_{e} = \frac{p'_{w} - p_{Ge}}{1/\Delta_{e}} = \frac{455, 3 - 229, 4}{15, 75 \cdot 10^{6}} = 0, 14 \cdot 10^{-4} \left[ \text{kg/m}^{2} \text{h} \right].$$
(287)

Strumienie te mają przeciwne zwroty – oba określają dopływ masy do powierzchni kondensacji i, oczywiście, różnią się od obliczonego poprzednio strumienia i. Oznacza to, że powyższe obliczenia trzebaby skorygować iteracyjnie, aby określić rzeczywiste wartości ciśnień. Procedura Glasera ignoruje ten problem i ogranicza się do pierwszego przybliżenia.

Ostatecznie ilość kondensatu po czasie  $t_K$ , powiedzmy 1140 godzinach (normowy okres kondensacji), wynosi

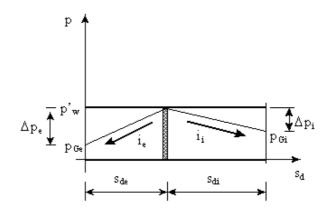
$$W_K = t_K (i_i - i_e) = 1140 \cdot (1,54 - 0,14) \cdot 10^{-4} = 0,1596 \text{ [kg/m}^2].$$
 (288)

Procedura dla określenia ilości wody, która odparowuje z przegrody jest oparta na takim samym przybliżeniu. Zakłada się warunki początkowe, powiedzmy znów w postaci normowej

$$\theta_e = \theta_i = 12^0 \text{ C}, \quad \varphi_e = \varphi_i = 70\%.$$
 (289)

Na tej podstawie oblicza się ciśnienie pary nasyconej, które musi panować w przegrodzie w czasie przemiany fazowej

$$p'_w = p'(\vartheta_e) = 1401 \text{ Pa.}$$
 (290)



Rys. 47: Odparowanie kondensatu w przegradzie o grubościach zastępczych

Wtedy można określić ciśnienie parcjalne na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni przegrody. W naszym przypadku

$$p_{Gi} = p_{Ge} = p'_w \varphi_i = 981 \text{ Pa.}$$
 (291)

Strumienie masy pary wodnej, odpływającej z powierzchni, na której wystąpiła kondensacja, oblicza się z wzorów przybliżonych

$$i_i = \frac{\Delta p_i}{1/\Delta_i}, \quad i_e = \frac{\Delta p_e}{1/\Delta_e}, \tag{292}$$

gdzie

$$\Delta p_i = p'_w - p_{Gi}, \quad \Delta p_e = p'_w - p_{Ge}, \quad p_{Gi} = p'_w \varphi_i, \quad p_{Ge} = p'_w \varphi_e,$$
 (293)

a  $1/\Delta_i, 1/\Delta_e$  są współczynnikami oporu dyfuzyjnego w obszarach wewnętrznym i zewnętrznym. W rozpatrywanym przykładzie przegrody mamy

$$\frac{1}{\Delta_i} = 1, 5 \cdot 10^6 \cdot (30 \cdot 0, 1 + 8 \cdot 0, 01) = 4, 62 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2 \text{h/kg},$$

$$\frac{1}{\Delta_e} = 1, 5 \cdot 10^6 \cdot (25 \cdot 0, 02 + 40 \cdot 0, 25) = 15, 75 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot \text{m}^2 \text{h/kg}.$$
(294)

Mamy wiec

$$i_i = \frac{1401 - 981}{4,62} \cdot 10^{-6} = 90,91 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^2\text{h},$$
  
 $i_e = \frac{1401 - 981}{15,75} \cdot 10^{-6} = 26,67 \cdot 10^{-6} \text{ kg/m}^2\text{h}.$ 

Ilość wody odparowanej w czasie  $t_P$  określa wzór

$$W_P = t_P \left( i_i + i_e \right). \tag{295}$$

Czas trwania okresu odparowywania kondensatu przyjmuje się  $t_P = 2160$  h. Otrzymujemy więc dla rozpatrywanej przegrody

$$W_P = 2160 \cdot (90, 91 + 26, 67) \cdot 10^{-6} = 0,2540 \text{ kg/m}^2.$$
 (296)

Norma przewiduje następujący warunek na obliczone wartości kondensatu:

$$W_K \le W_P. \tag{297}$$

Dodatkowo dla dachów i ścian

$$W_K \le 1,0 \text{ kg/m}^2,$$
 (298)

a na powierzchniach kontaktowych warstw nie przewodzących wody kapilarnie

$$W_K \le 0.5 \text{ kg/m}^2.$$
 (299)

Przegroda rozważana w przykładzie spełnia wszystkie trzy warunki.

#### 6.5.3 Przykład procedury Glasera dla przegrody z pustką powietrzną

Rozważymy jeszcze jeden przykład określenia kondensacji dla przegrody, w której pojawia się pustka powietrzna. Rozwiążemy to zadanie z uwzględnieniem i bez uwzględnienia promieniowania. Przegroda jest przedstawiona na poniższym Rysunku, a jej dane podane w Tabeli.

Rys.: Przykład przegrody z pustką powietrzną (warstwa 3)

Obliczenia wykonamy dla normowych danych dla kondensacji:

$$\vartheta_e = -10^0 \,\text{C}, \quad \vartheta_i = 20^0 \,\text{C},$$

$$\varphi_e = 80\%, \quad \varphi_i = 50\%.$$
(300)

**Tabela:** dane dla przegrody z pustką powietrzną

		d [m]	$\lambda  [\mathrm{W/mK}]$	$\mu[-]$	$d/\lambda  [\mathrm{m^2 K/W}]$	$s = \mu d  [\mathrm{m}]$
e					$1/\alpha_e = 0,06$	
1	tynk zewn.	0,02	0,87	20	0,02299	0, 4
2	beton komorkowy	0,20	0, 20	100	1,0	20,0
3	powietrze	0, 10	0,026	1,0	3,8462/0,2482	0, 1
4	beton komorkowy	0,20	0, 20	100	1,0	20,0
5	tynk wewn.	0,02	0,87	20	0,02299	0,4
i					$1/\alpha_i = 0, 15$	

Dla powietrza podano dwie wartości oporu cieplnego: wartość górna odpowiada oporowi bez uwzględnienia promieniowania, a dolna z uwzględnieniem promieniowania. Otrzymuje się ją z następującego obliczenia. Jeśli przez  $\vartheta_3$  i  $\vartheta_4$  oznaczymy temperaturę powierzchni ograniczających warstwę powietrza, to strumień ciepła przez tą warstwę jest następujący

$$q = \lambda_3 \frac{\vartheta_4 - \vartheta_3}{d_3} + \frac{\sigma}{1/\varepsilon_3 + 1/\varepsilon_4 - 1} \left( (\vartheta_4 + 273)^4 - (\vartheta_3 + 273)^4 \right) \approx$$

$$\approx \lambda_3 \frac{\vartheta_4 - \vartheta_3}{d_3} + \frac{4\sigma \cdot 273^3}{1/\varepsilon_3 + 1/\varepsilon_4 - 1} \left( \vartheta_4 - \vartheta_3 \right), \tag{301}$$

 $\operatorname{tzn}.$ 

$$\vartheta_4 - \vartheta_3 = \frac{q}{R_3}, \quad R_3 = \left(\frac{\lambda_3}{d_3} + \frac{4\sigma \cdot 273^3}{1/\varepsilon_3 + 1/\varepsilon_4 - 1}\right)^{-1}, \quad \sigma = 5,66 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2 \text{K}^4.$$
(302)

W Tabeli przyjęto jednakowe współczynniki absorpcji dla obu granic warstw $\varepsilon_3=\varepsilon_4=0,9.$ 

Całkowity opór cieplny R i opór dyfuzyjny  $1/\Delta$  wynoszą

$$R = \frac{1}{U} = \begin{cases} 6,10218 \text{ m}^2\text{K/W bez uwzgl. promieniowania} \\ 2,5042 \text{ m}^2\text{K/W z uwzgl. promieniowania} \end{cases}, \tag{303}$$

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\delta} \cdot 40, 9 = 61, 35 \cdot 10^6 \text{ m}^2 \text{h Pa/kg}, \quad \frac{1}{\delta} = 1, 5 \cdot 10^6 \text{ m h Pa/kg}.$$
 (304)

Jednocześnie ciśnienie pary nasyconej i ciśnienie parcjalne poza przegrodą są określone następująco

$$p'(\vartheta = -10^{0}) = 286,77 \text{ Pa} \Rightarrow p_{Ge} = p' \cdot \varphi_{e} = 229,42 \text{ Pa},$$
 (305)  
 $p'(\vartheta = 20^{0}) = 2336,9 \text{ Pa} \Rightarrow p_{Gi} = p' \cdot \varphi_{i} = 1168,5 \text{ Pa}.$ 

Z zasady zachowania energii i zasady zachowania masy mamy więc

$$q = \frac{\vartheta_i - \vartheta_e}{R} = \begin{cases} 11,98 \text{ W/m}^2 \text{ z uwzgl. promieniowania,} \\ 4,92 \text{ W/m}^2 \text{ bez uwzgl. promieniowania.} \end{cases}$$
(306)

$$i = \Delta (p_{Gi} - p_{Ge}) = 1,53 \cdot 10^{-5} \text{ kg/m}^2 \text{h.}$$
 (307)

Oczywiście, promieniowanie wspomaga przenoszenie energii, a więc strumień q jest dla tego przypadku większy. Ma to istotny wpływ na warunki wystąpienia kondensacji.

Wykorzystując wzór Boltona

$$p' = 611, 2 \cdot \exp\left(17, 67 \cdot \frac{\vartheta}{\vartheta + 243, 5}\right),$$
 (308)

otrzymujemy wyniki zestawione w poniższej Tabeli

**Tabela:** temperatura, ciśnienie pary nasyconej i ciśnienie parcjalne na granicach warstw

	$\vartheta$ bez prom.	$\vartheta$ z prom.	p' bez prom.	p' z prom.	$p_G$
е	-10	-10	286,77	286,77	229,42
e-1	-9,70	-9.28	293,63	303,48	229,42
1-2	-9,59	-9,01	296,18	309,97	238,60
2-3	-4,67	2,97	432,64	756,23	697,6
3-4	14,25	5,95	1623,5	931,59	699,90
4-5	19,17	17,93	2219,4	2053,5	1158,9
5-6	19,28	18,21	2234,7	2090,0	1168,5
i	20	20	2336,9	2336,9	1168,5

Jak widać, uwzględnienie promieniowania prowadzi do wniosku, że w tej przegrodzie nie wystąpi kondensacja, natomiast pominięcie promieniowania oznacza, że w przegrodzie na granicy warstw 2-3 wystąpi kondensacja. Jej wielkość określamy przy pomocy metody Glasera. Strumienie masy do tej warstwy mają postać

$$i_{i} = \frac{(1168, 5 - 432, 64)}{1.5 \cdot 10^{6} \cdot (0, 1 + 20 + 0, 4)} = 2,39 \cdot 10^{-5},$$

$$i_{e} = \frac{(432, 64 - 229, 42)}{1, 5 \cdot 10^{6} \cdot (20 + 0, 4)} = 6,64 \cdot 10^{-6},$$
(309)

przy czym pierwszy strumień doprowadza parę do warstwy, a drugi odprowadza. Całkowita ilość kondensatu w okresie zimowym wynosi więc

$$W_K = 1440 \cdot (2,39 \cdot 10^{-5} - 6,64 \cdot 10^{-6}) = 0,025 \text{ kg/m}^2.$$
 (310)

Jest to ilość bardzo niewielka, a więc w tym przypadku szczególnym różnicę pomiędzy obliczeniami z uwzględnieniem i bez uwzględnienia promieniowania można zignorować. W przypadku ogólnym nie jest to jednak wskazane.

### 6.5.4 Zjawiska kapilarne w konstrukcjach budowlanych

Wilgotne powietrze przepływające przez pory materiału dostarcza pary wodnej na powierzchnie kanalików i cząsteczki wody mogą się na tej powierzchni osadzać w postaci warstwy mono- albo multicząsteczkowej na skutek słabych sił oddziaływania typu van der Waalsa. Istnienie tych sił jest wynikiem lokalnych odchyleń od równowagi sił elektromagnetycznych. Powstawanie takich warstw powoduje zaburzenia w oddziaływaniach między

cząsteczkami wody płynnej i prowadzi do powstania menisków. Mogą one jednak powstawać tylko w kanałach dostatecznie wąskich, aby znaczne obszary powierzchni swobodnej płynu odczuwały istnienie brzegu.

Kanaliki w rzeczywistych materiałach budowlanych nie mają zwykle cylindrycznych kształtów. Ich skomplikowana geometria może być tylko w przybliżeniu opisywana przez cylindryczny model sił kapilarnych, który omawiamy dalej w tej części notatek. Wymiary porów w materiałach porowatych, które decydują o stosowalności tego przybliżenia, są zwykle klasyfikowane w trzech grupach

- mikropory o promieniu  $\leq 2$  nm (w betonie nazywane porami żelowymi),
- mezopory o promieniu w przedziale [2 nm, 50 nm],
- makropory o promieniu większym od 50 nm (tzn.  $0.5 \cdot 10^{-7}$  m).

Zjawiska kapilarne w konstrukcjach budowlanych są głównie zależne od udziału mezoporów.

Tabela 26 (D. Gawin; Modelowanie sprzężonych zjawisk cieplno-wilgotnościowych w materiałach i elementach budowlanych, Łódź, 2000):

Podstawowe parametry struktury wewnętrznej wybranych materiałów budowlanych, uzyskanych przy pomocy porozymetrii rtęciowej

	zaprawa	cegła	gips	beton
	cementowa	ceramiczna	budowlany	komórkowy
$\begin{bmatrix} \text{całk. obj.} \\ \text{porów } \left[ \text{dm}^3 / \text{kg} \right] \end{bmatrix}$	0,1008	0.1870	0.6407	0.5694
całk. pow. porów $[m^2/g]$	1,317	7.867	3.041	26.743
fr. średnica porów (wg. obj.) $[\mu m]$	2,7376	0,1958	1,1231	0,2276
fr. średnica porów (wg. pow.) $[\mu m]$	0,0214	0,0423	0,8754	0,0304
frednica zastępcza $[\mu m]$	0,3061	0,9051	0,8427	0,0852
gęstość pozorna [kg/m³]	2019,1	1779,8	935,3	1002,2
gęstość szkieletu [kg/m³]	2535,2	2667,9	2333,6	2333,8
porowatość [%]	20,4	33,3	60,5	57,1

W celu określenia równania powierzchni pomiędzy parą i kondensatem rozpatrzymy jej infinitezymalny wycinek przedstawiony na Rys. 48. Przyjmujemy, że na powierzchnię działa ciśnienie pary  $p_{\beta}$  i ciśnienie kondensatu  $p_{\alpha}$ , a w płaszczyźnie stycznej do powierzchni działa w dowolnym przekroju napięcie powierzchniowe (siły błonowe)  $\sigma$ . Warunek równowagi znajdziemy z zasady prac wirtualnych, dokonując małego przesunięcia powierzchni dz w kierunku  $\mathbf{n}$  do niej prostopadłym.

Zmiana powierzchni dA, spowodowana zmianą objętości pary na skutek różnicy ciśnień ma postać

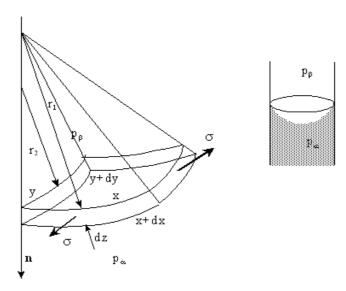
$$dA = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx, \quad dV = xydz.$$
 (311)

Praca, wykonana przy tej zmianie wynosi

$$(p_{\beta} - p_{\alpha}) \, dV = \sigma dA,\tag{312}$$

gdzie  $\sigma$  [N/m] jest napięciem powierzchniowym, tzn. siłą, działającą na jednostkę długości przekroju powierzchni kontaktowej. Mamy więc

$$p_{\beta} - p_{\alpha} = \sigma \left( \frac{1}{y} \frac{dy}{dz} + \frac{1}{x} \frac{dx}{dz} \right). \tag{313}$$



Rys. 48: Wycinek powierzchni o dwóch promieniach krzywizny  $r_1, r_2$  pomiędzy parą  $\beta$  i kondensatem  $\alpha$ 

Z podobieństwa trójkątów otrzymujemy jednocześnie

$$\frac{dx}{dz} = \frac{x}{r_1}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{y}{r_2}.$$
 (314)

Warunek równowagi ma więc postać

$$p_{\beta} - p_{\alpha} = \sigma \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) = \frac{2\sigma}{r_m}, \quad \frac{2}{r_m} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2},$$
 (315)

gdzie  $1/r_m$  jest nazywane krzywizną średnią powierzchni. Powyższy wzór nazywa się równaniem Kelvina, a  $p_k = p_\beta - p_\alpha$  jest ciśnieniem kapilarnym.

**Przykład.** W rurce o średnicy d podciągana jest kapilarnie woda. Ciśnienie atmosferyczne  $p_a$  (=  $p_\beta$ !) jest wtedy równoważone przez ciśnienie słupa wody o wysokości h

i przez napięcie powierzchniowe. Na powierzchni menisku i na poziomie dolnym słupa wody (por. Rys. 49) mamy wtedy warunki równowagi

$$\frac{\pi d^2}{4} p_a - \pi d\sigma = \frac{\pi d^2}{4} p_w^0,$$

$$p_a = p_w^0 + \rho_w gh,$$
(316)

gdzie  $p_a$  – ciśnienie atmosferyczne,  $p_w^0$  (=  $p_\alpha$ !) – ciśnienie kondensatu na powierzchni menisku,  $\rho_w$  – gęstość masy wody. Z tych warunków wynika

$$h = \frac{4\sigma}{\rho_w gd} = \frac{4 \cdot 0,073}{10^3 \cdot 10 \cdot d} = 0,292 \cdot 10^{-4} \frac{1}{d}.$$
 (317)

Na przykład, dla kapilary  $d = 100 \text{ nm} = 10^{-7} \text{ m}$  otrzymujemy h = 292 m.

Oprócz warunku równowagi na granicy dwóch faz panuje równowaga termodynamiczna, która sprowadza się do równości potencjałów chemicznych pary i kondensatu w mieszaninie gazów

$$\mu_{\alpha} = \mu_{\beta}. \tag{318}$$

Na podstawie równania Gibbsa dla każdego ze składników mamy

$$d\mu_{\alpha} - v_{\alpha}dp_{\alpha} + s_{\alpha}dT = 0, \quad s_{\alpha} = \frac{S_{\alpha}}{m_{\alpha}},$$

$$d\mu_{\beta} - v_{\beta}dp_{\beta} + s_{\beta}dT = 0, \quad s_{\beta} = \frac{S_{\beta}}{m_{\beta}},$$

$$(319)$$

gdzie  $m_{\alpha}, m_{\beta}$  są masami faz. Dla procesu izotermicznego otrzymujemy więc

$$dp_{\alpha} = \frac{v_{\beta}}{v_{\alpha}} dp_{\beta}. \tag{320}$$

Podstawiając (315) otrzymujemy

$$d\left(\frac{2\sigma}{r_m}\right) = \frac{v_\alpha - v_\beta}{v_\alpha} dp_\beta. \tag{321}$$

Ponieważ gęstość masy kondensatu jest dużo większa od gęstości masy pary, więc  $v_{\alpha} \ll v_{\beta}$ . Zakładając, że para spełnia termiczne równanie stanu dla gazu idealnego

$$v_{\beta} = \frac{RT}{M_{\beta}p_{\beta}},\tag{322}$$

gdzie  $M_r$  jest względną masą molekularną pary (dla wody  $M_r = 18$ ), R jest stałą gazową (tzn.  $8.3143 \cdot 10^3 \text{ J/kgK}$ ), otrzymujemy więc

$$d\left(\frac{2\sigma}{r_m}\right) = -\frac{RT}{M_r v_\alpha} \frac{dp_\beta}{p_\beta}.$$
 (323)

Całkujemy to równanie w granicach pomiędzy ciśnieniem aktualnym p pary dla średniego promienia menisku  $r_m$  i ciśnieniem pary nasyconej p', przy której  $r_m \to \infty$ . Otrzymujemy wtedy

$$\ln \frac{p}{p'} = -\frac{2\sigma V}{RT} \frac{1}{r_m}, \quad V = v_{\alpha} M_r, \tag{324}$$

gdzie przyjęto, że  $v_{\alpha}$  jest stałe, tzn. woda jest nieściśliwa. Powyższy wzór jest również nazywany wzorem Kelvina. Określa on wilgotność względną nad meniskiem wklęsłym

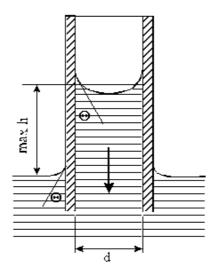
$$\varphi = \frac{p}{p'} = \exp\left(-\frac{p_k}{\rho_{wada}RT}\right), \quad p_k = p_\beta - p_\alpha.$$
 (325)

Wzór (324) wskazuje na możliwość wystąpienia niestabilności, którą nazywa się kondensacją kapilarną. Rozważmy cylinder otwarty na obu końcach, w którym istnieje cienka warstwa wody adsorbowanej przez ścianki. Na skutek oddziaływania z cząstkami pary wodnej osadzają się na tej warstwie nowe cząstki, zmniejszając promień wewnętrzny cylindra  $r_i$ . Ponieważ  $2/r_m = 1/r_i + 1/\infty$ , więc wykładnik w związku dla p/p' będzie malał, a tym samym maleje eksponencjalnie ciśnienie pary wodnej. Prowadzi to do szybkiego skroplenia całej pary wodnej w cylindrze. Niestabilność ta nie istnieje w kapilarach zamkniętych z jednej strony (proces przebiega na powierzchniach sferycznych, a nie cylindrycznych). Prowadzi to do istnienia zjawiska histerezy.

Jak już wspomniano, w zastosowaniach do fizyki budowli stosuje się uproszczony model zastępczej kapilary cylindrycznej. Wtedy  $r_1 = r_2 = r_m = r$ . Do oceny napięcia powierzchniowego zakłada się uproszczony model Younga-Duprė

$$\sigma = \sigma_C \cos \Theta + \sigma_S, \tag{326}$$

w którym  $\sigma_C$  jest wartością napięcia powierzchniowego cieczy i dla wody  $\sigma_C = 0.073$  N/m w temperaturze  $20^0$  C, a  $\sigma_S$  jest napięciem powierzchniowym (energią powierzchniową na powierzchni rozdziału faz) pomiędzy ciałem stałym i filmem cieczy na powierzchni kapilary. W przybliżeniu  $\sigma_S \approx 0$ .



Rys. 49: Podciąganie kapilarne

Kapilara jest przedstaiona na Rys. 49. Oznaczenia na rysunku:  $\Theta$  – kąt zwilżania, d – średnica kapilary, max h – wysokość słupa wody. Biorąc pod uwagę powyższe rozważania otrzymujemy

$$p_k = \frac{2\sigma\cos\Theta}{r}, \quad h = \frac{2\sigma\cos\Theta}{\rho_{woda}g}\frac{1}{r},$$
 (327)

gdzie  $p_k$  jest ciśnieniem kapilarnym  $[N/m^2]$ , r – promień kapilarny [m].

Ilość kondensatu, który może powstać w elemencie konstrukcyjnym określa się w sposób szacunkowy ze wzoru

$$m = w\sqrt{t},\tag{328}$$

gdzie m jest masą wody przeliczoną na jednostkę powierzchni przegrody [kg/m²], t – czasem w godzinach, a w – współczynnikiem o następujących wartościach

Tabela 27: Wartości graniczne współczynnika podciągania kapilarnego

$w \ge 2.0 \text{ kg/m}^2 \sqrt{\text{h}}$	silnie podciągająca przegroda
$w \le 2,0 \text{ kg/m}^2 \sqrt{\text{h}}$	przegroda hamująca podciąganie
$w \le 0.5 \text{ kg/m}^2 \sqrt{\text{h}}$	przegroda odpychająca wodę
$w \le 0,001 \text{ kg/m}^2 \sqrt{\text{h}}$	przegroda nieprzepuszczalna

Norma przewiduje następujące ograniczenia na transport kapilarny

$$w \cdot s_d \leq 0, 2 \text{ kg/m}\sqrt{h},$$
  
 $w \leq 0, 5 \text{ kg/m}^2\sqrt{h}$   
 $s_d \leq 2, 0 \text{ m}.$ 

## 6.5.5 Równanie dyfuzji

W przypadku ogólnym niestacjonarnych trójwymiarowych problemów transportu wilgotności korzysta się z ogólnej postaci równania bilansu masy i stacjonarnej postaci równania bilansu pędu dla pary

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho_G \mathbf{v}_G\right) = 0, \quad \operatorname{grad} p_G + \pi \mathbf{v}_G = 0. \tag{329}$$

Zakładając, że proces dyfuzyjny jest izotermiczny mamy z termicznego równania stanu następujący związek

$$p = p(\rho_G, T) \quad \Rightarrow \quad \operatorname{grad} p_G = c^2 \operatorname{grad} \rho_G, \quad c^2 = \frac{\partial p_G}{\partial \rho_G},$$
 (330)

gdzie  $c^2$  jest tzw. izotermiczną prędkością dźwięku w parze.

Z powyższych równań łatwo jest teraz wyeliminować ciśnienie. Otrzymujemy wtedy

$$\frac{\partial \rho_G}{\partial t} = \operatorname{div}\left(D\operatorname{grad}\rho_G\right), \quad D = \frac{\rho_G c^2}{\pi},$$
(331)

gdzie D jest współczynnikiem dyfuzji (por. (264)). Jest to tzw. równanie dyfuzji.

Przyjmując, że wszystkie współczynniki są stałe można to równanie również napisać w następującej postaci, najczęściej występującej w zastosowaniach

$$\frac{\partial p_G}{\partial t} = D\nabla^2 p_G. \tag{332}$$

Po względem matematycznym jest to równanie identyczne, jak równanie przewodnictwa cieplnego (105). Dlatego też stosuje się do jego rozwiązywania takie same metody matematyczne – np. metodę rozdzielania zmiennych i metodę Fouriera.

Omówimy jeszcze warunki brzegowe dla równania dyfuzji. Podobnie, jak w przypadku przewodnictwa cieplnego na brzegu można zadać albo samo ciśnienie, albo też pochodną ciśnienia w kierunku prostopadłym do brzegu:

$$p_G|_{\partial \mathcal{P}_p} = p_{Ge}, \quad \operatorname{grad} p_G \cdot \mathbf{n}|_{\partial \mathcal{P}_m} = -\frac{c^2}{D} i_e, \quad \partial \mathcal{P}_p \cup \partial \mathcal{P}_m = \partial \mathcal{P},$$
 (333)

gdzie  $p_{Ge}$  jest zadanym ciśnieniem zewnętrznym, a  $i_e (= \rho_G \mathbf{v}_G \cdot \mathbf{n})$  jest zadanym zewnętrznym strumieniem masy. Podobnie jak w przypadku warunku Newtona dla przewodnictwa cieplnego, możliwe są również kombinacje tych warunków.

# 7 Akustyka

# 7.1 Liniowe równanie falowe, rozwiązanie d'Alamberta

Rozpatrzmy liniowe równanie różniczkowe cząstkowe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. {334}$$

W równaniu tym u jest nieznaną funkcją czasu t i zmiennej przestrzennej x. Wielkość c jest stała i dodatnia.

Rozwiązania tego równania bedziemy szukali przy pomocy metody *charakterystyk*. W tym celu napiszmy formalnie powyższe równanie w następującej postaci

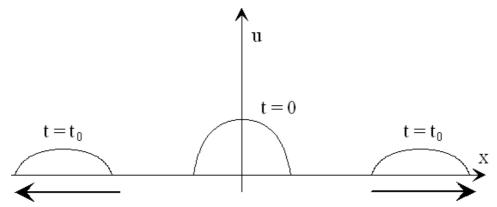
$$\frac{\partial w}{\partial t} - c \frac{\partial w}{\partial x} = 0, 
\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = w,$$
(335)

gdzie w jest funkcją pomocniczą. Łatwo sprawdzić, że powyższe równania można napisać w postaci

$$\frac{dw}{dt} = 0 \text{ wzdłuż prostej } \frac{dx}{dt} = -c \quad \Rightarrow \quad w = w(x + ct)$$

$$\frac{du}{dt} = w \text{ wzdłuż prostej } \frac{dx}{dt} = c \quad \Rightarrow \quad u = u_{+}(x - ct) + u_{-}(x + ct) . \quad (336)$$

W tych związkach funkcje  $w, u_+, u_-$  są dowolnymi funkcjami jednej zmiennej. Proste  $x = x_0 - ct$ ,  $x = x_0 + ct$  nazywa się charakterystykami równania (334), a rozwiązanie (336) – rozwiązaniem d'Alamberta. Rozwiązanie to można interpretować jako superpozycję dwóch fal, z których jedna biegnie na prawo z prędkością c, a druga na lewo z prędkością -c (por. Rys.50). Mianowicie, wyobraźmy sobie zaburzenie w chwili początkowej u(x, t = 0), które na rysunku jest przedstawione jako krzywa wokół początku układu współrzędnych. Na podstawie rozwiązania d'Alamberta, w dowolnej chwili czasu  $t = t_0$  rozwiązanie u jest sumą dwóch rozwiązań  $u_+$  i  $u_-$ , z których pierwsze bez zmiany kształtu przemieszcza się w prawo z prędkością c, a drugie w lewo z prędkością -c. Przyjmując prędkość początkową  $\partial u/\partial t$  (x, t = 0) = 0 otrzymujemy, że oba zaburzenia mają ten sam kształt.



Rys. 50: Schemat jednowymiarowego rozwiązania d'Alamberta

Ze względu na powyżej opisane własności rozwiązania d'Alamberta równanie (334) nazywa się równaniem falowym.

Rozwiązanie d'Alamberta można również łatwo uzyskać przez zamianę zmiennych, sugerowaną przez równania charakterystyk. Wprowadźmy następującą zamianę zmiennych niezależnych

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct. \tag{337}$$

Wtedy

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right), \qquad (338)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Po wstawieniu do równania (334) otrzymujemy

$$4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(\xi, \eta) = u_+(\xi) + u_-(\eta). \tag{339}$$

Powracając do starych zmiennych otrzymujemy rozwiązanie d'Alamberta.

Latwo się przekonać, że równanie (334) pojawia się w opisie drgań podłużnych pręta. To jednowymiarowe zadanie jest opisane zasadą zachowania pędu i prawem Hooke'a w postaci

$$\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \sigma = E\varepsilon, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x},$$
(340)

gdzie  $\rho_0$  jest gęstością masy, v – prędkością w kierunku osi x,  $\sigma$  – naprężeniem normalnym,  $\varepsilon$  – deformacją, a u – przemieszczeniem w kierunku osi x. E oznacza moduł sprężystości Younga. Łącząc te równania otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad c^2 = \frac{E}{\rho_0}.$$
 (341)

Otrzymujemy więc równanie (334), w którym prędkość propagacji fali jest  $c = \sqrt{E/\rho_0}$ . Odpowiednik trójwymiarowy równania (334) ma postać

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u. \tag{342}$$

Z równaniami tego typu mamy do czynienia w akustyce. W dalszym ciągu tych notatek omawiamy również własności rozwiązań pewnych uogólnień tego równania.

# 7.2 Podstawowe wielkości charakteryzujące falę akustyczną

### 1) Ciśnienie akustyczne

Jeśli przyjmiemy rozwiązanie pręta w powyższym przykładzie w postaci

$$u = A\sin(kx - \omega t), \quad c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$
 (343)

to mamy

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = -A\omega\cos(kx - \omega t), \quad \varepsilon = Ak\cos(kx - \omega t) = -\frac{v}{c},$$
 (344)

oraz

$$\sigma = E\varepsilon = -\rho cv. \tag{345}$$

Wielkość  $p_a = \rho cv$  nazywamy *ciśnieniem akustycznym*.

## 2) Natężenie dźwięku.

Moc naprężeń w naszym przykładzie ma postać

$$W = \sigma v = -\frac{\sigma^2}{\rho c}. (346)$$

Określa ona moc na jednostkę przekroju poprzecznego pręta. Ogólnie wielkość

$$J = \frac{p_a^2}{\rho c},\tag{347}$$

nazywa się natężeniem dźwięku.

#### 3) Moc akustyczna.

Zródło dźwięku charakteryzuje następująca wielkość

$$P_a = \int_S JdS = \frac{4\pi r^2 p^2}{\rho c},\tag{348}$$

gdzie S jest powierzchnią zamkniętą wokół źródła . Wielkość ta jest nazywana mocq akustyczną.

#### 4) Poziom mocy akustycznej

$$L_p = 10 \cdot \lg \frac{P_a}{P_0},\tag{349}$$

gdzie  $P_0$  wartość mocy odniesienia. Zwykle przyjmuje się  $P_0 = 10^{-12}$  W.

#### 5) Poziom natężenia dźwięku

$$L_J = 10 \cdot \lg \frac{J}{J_0},\tag{350}$$

gdzie  $J_0$  – natężenie odniesienia, wynoszące  $10^{-12}$  W/m<sup>2</sup>.

## 6) Poziom ciśnienia akustycznego

$$L_p = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0},\tag{351}$$

gdzie  $p_0$  – ciśnienie odniesienia,  $2 \cdot 10^{-5}$  Pa.

**Tabela 28:** Poziom ciśnienia akustycznego dla różnych dźwięków

$L_p [dB]$	
0	początek słyszalności
10	najniższy poziom słyszalności
1520	cichy szmer liści
2530	szept, czytelnia
3040	spokojne osiedle
4050	cicha rozmowa, ciche biuro
5060	normalna rozmowa
5565	elektrolux
6065	głośne biuro
6570	szczekanie psa, maszyna do pisania
5575	przedział kolejowy
7080	ruch uliczny o dużym natężeniu
7585	metro, samochód
8085	okrzyki
8090	przejeżdżająca ciężarówka, drukarnia
90100	tkalnia, pociąg pośpieszny, turbogenerator
100110	kuźnia, głośny piorun
110120	samolot
120130	próg bólu
130150	odrzutowiec

# 7.3 Warunki brzegowe

Dla jednowymiarowego zagadnienia omówionego powyżej łatwo jest również sformułować warunki, jakie musi spełniać fala biegnąca w skończonym pręcie. Sprawdzimy te warunki jedynie w punkcie połączenia dwóch prętów półnieskończonych o różnych własnościach materiałowych. Powiedzmy, że gęstości masy, moduły Younga i prędkości propagacji są w takim układzie, odpowiednio,  $\rho_1, E_1, c_1$  dla x < 0 i  $\rho_2, E_2, c_2$  dla x > 0. Jeśli rozwiązania oznaczymy w tych dwóch częściach przez  $u_1$  i  $u_2$  to w punkcie połączenia muszą zachodzić warunki

$$u_1(x=0,t) = u_2(x=0,t)$$
 – ciągłość przemieszczeń, (352)  
 $E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(x=0,t) = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(x=0,t)$  – ciągłość naprężeń.

Wybierzmy rozwiązania równań w obu obszarach w postaci

$$u_1 = A_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} \text{ dla } x < 0, \quad u_2 = A_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} \text{ dla } x > 0,$$
 (353)

gdzie podstawienie do równań prowadzi do związków

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c_2}. \tag{354}$$

Pierwsze rozwiązanie nazywa się falą padającą, a drugie – falą transmitowaną. Łatwo się przekonać, że rozwiązania (353) nie mogą spełnić warunków w punkcie połączenia.

Mianowicie, muszą w tym punkcie zachodzić związki

$$A_1 = A_2, \quad E_1 k_1 A_1 = E_2 k_2 A_2,$$

co jest jednocześnie możliwe tylko, gdy  $A_1 = 0$ ,  $A_2 = 0$ . Oznacza to, że rozwiązanie trzeba uzupełnić o falę *odbitą* w punkcie połączenia:

$$u_1' = B_1 e^{-i(k_1 x + \omega t)} \text{ dla } x < 0.$$
 (355)

Warunki brzegowe mają wtedy postać

$$A_1 + B_1 = A_2,$$

$$k_1 E_1 (A_1 - B_1) = k_2 E_2 A_2.$$
(356)

Ten układ równań można łatwo rozwiązać zakładając, że amplituda fali padającej  $A_1$  jest znana. Otrzymujemy

$$R = \frac{B_1}{A_1} = \frac{k_1 E_1 - k_2 E_2}{k_1 E_1 + k_2 E_2} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

$$T = \frac{A_2}{A_1} = \frac{2k_1 E_1}{k_1 E_1 + k_2 E_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2},$$
(357)

gdzie

$$Z_1 = \rho_1 c_1, \quad Z_2 = \rho_2 c_2. \tag{358}$$

Współczynnik R jest nazywany współczynnikiem odbicia (ang. reflection), a współczynnik T – współczynnikiem transmisji. Wielkości  $Z_1, Z_2$  nazywa się impedancjami.

Rozpatrzmy dwa przypadki szczególne. Niech impedancja  $Z_1$  pręta, w którym propaguje się fala padająca bdzie większa, niż impedancja  $Z_2$ . Wtedy współczynnik odbicia R jest dodatni, a to oznacza, że amplituda fali odbitej  $B_1$  ma ten sam znak jak amplituda fali padającej  $A_1$ . W przeciwnym przypadku  $B_1$  ma znak przeciwny. Oznacza to, że w pierwszym przypadku fala padająca będzie wzmacniana, a w drugim osłabiana.

Typowe przybliżone wartości impedancji są następujące:

$$Z_{powietrze} = 1 \cdot 333, 5 = 333, 5 \left[ \text{kg/m}^2 \cdot s \right],$$
  
 $Z_{beton} = 2500 \cdot 3300 = 8, 25 \cdot 10^6 \left[ \text{kg/m}^2 \cdot s \right],$   
 $Z_{stal} = 7700 \cdot 5200 = 40, 04 \cdot 10^6 \left[ \text{kg/m}^2 \cdot s \right].$ 

Oznacza to, na przykład, że fala padająca z powietrza na beton wywołuje falę transmitowaną o amplitudzie  $A_2=0,00008\cdot A_1$ , co oznacza, że praktycznie w całości fala będzie odbita. Jednocześnie fala padająca z betonu na warstwę powietrza wywołuje falę transmitowaną o amplitudzie  $A_2=1,99992\cdot A_1$ , co oznacza, że fala transmitowana ulega prawie dwukrotnemu wzmocnieniu w stosunku do fali padającej. Do tych zagadnień powrócimy rozważając ilość energii przenoszonej przez falę.

## 7.4 Propagacja dźwięku w gazach idealnych

Podstawą teorii propagacji dźwięku w gazach są równania zachowania masy, pędu i energii

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \right) + \operatorname{grad} p = 0,$$

$$\rho \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} + p \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$
(359)

gdzie ciśnienie p spełnia termiczne równanie stanu, energia wewnętrzna  $\varepsilon$  – kaloryczne równanie stanu, a strumień ciepła – prawo Fouriera

$$p = \frac{R}{M_r} \rho T$$
,  $\varepsilon = z \frac{R}{M_r} T$ ,  $\mathbf{q} = -\lambda \operatorname{grad} T$ . (360)

Rozważa się fale o małej amplitudzie, tzn. odchylenie od stanu równowagi  $(\rho_0, T_0, \mathbf{v} = \mathbf{0})$  musi spełniać warunki

$$\max\left\{ \left| \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \right|, \left| \frac{T - T_0}{T_0} \right|, \left| \mathbf{v} \sqrt{\frac{\rho_0}{p_0}} \right| \right\} \ll 1, \quad p_0 = \frac{R}{M_r} \rho_0 T_0, \tag{361}$$

gdzie, jak zobaczymy dalej,  $\sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}$  jest tzw. *izotermiczną prędkością dźwięku* i służy w powyższym związku jedynie do oszacowania rzędu wielkości prędkości  $\mathbf{v}$ .

Z uwagi na prędkość propagacji dźwięku przyjmuje się również uproszczenie, że fala dźwiękowa nie zakłuca przestrzennego rozkładu temperatury, tzn. że lokalne zaburzenia temperatury spowodowane falą nie mają dostatecznie dużo czasu, by zakłócić rozkład temperatury: grad  $T\approx 0$  w trakcie propagacji. Jest to tzw. przybliżenie adiabatyczne i oznacza:  $\mathbf{q}\approx \mathbf{0}$ .

Linearyzacja równań prowadzi do następującego układu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{R}{M_r} \left[ T_0 \operatorname{grad} \rho + \rho_0 \operatorname{grad} T \right] = 0,$$

$$\rho_0 \frac{R}{M_r} \left( z \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \operatorname{div} \mathbf{v} \right) = 0.$$
(362)

Poszukujemy rozwiązań tego układu w postaci tzw. fal monochromatycznych, tzn. fal o zadanej częstotliwości  $\omega$ . Jest to, oczywiście, specjalny przypadek metody rozdzielania zmiennych, którą omawialiśmy dla równania przewodnictwa cieplnego.

Wtedy można zapisać rozwiązania w następującej postaci zespolonej

$$\rho = A_{\rho}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{A}_{v}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad T = A_{T}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}, \quad (363)$$

$$e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} = \cos\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t\right) + i\sin\left(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega t\right).$$

gdzie  $A_{\rho}$ ,  $\mathbf{A}_{v}$ ,  $A_{T}$  są stałymi amplitudami i mogą być one zespolone, a  $\mathbf{k}$  jest wektorem falowym o postaci  $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , gdzie wektor jednostkowy  $\mathbf{n}$  wskazuje w kierunku propagacji fali, a część rzeczywista liczby falowej  $k = \sqrt{\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}}$  określa dla danej częstotliwości prędkość fazową propagacji fali

$$c_{ph} = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k}.\tag{364}$$

Jak wynika z następującego przedstawienia rozwiązania

$$\rho = A_{\rho} e^{-(\operatorname{Im} k)x} e^{i(\operatorname{Re} k) \left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - c_{ph} t\right)}, \quad \text{itd.}, \tag{365}$$

część urojona liczby falowej  ${\rm Im}\,k$ określa zanikanie fali w przestrzeni, tzn. określa tlumienie fali.

Wracamy do rozwiązania układu równań dla gazu idealnego. Podstawienie (363) do (362) daje

$$-\omega A_{\rho} + \rho_{0} \mathbf{A}_{v} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

$$-\rho_{0} \omega \mathbf{A}_{v} + \frac{R}{M_{r}} [T_{0} A_{\rho} \mathbf{k} + \rho_{0} A_{T} \mathbf{k}] = 0,$$

$$-z \omega A_{T} + T_{0} \mathbf{A}_{v} \cdot \mathbf{k} = 0.$$
(366)

Jest to jednorodny układ równań dla stałych  $A_{\rho}$ ,  $A_{v}$ ,  $A_{T}$ . Warunkiem istnienia nietrywialnych rozwiązań jest zerowanie się wyznacznika tego układu. Przeprowadźmy najpierw redukcję tego układu. Dla stałej wektorowej otrzymujemy

$$\mathbf{A}_v = -A_T \frac{R}{M_r} (1+z) \frac{k}{\omega} \mathbf{n}. \tag{367}$$

Oznacza to, że stała ta ma tylko składową w kierunku propagacji **n**. Takie fale nazywamy *podłużnymi*. Fale *poprzeczne*, których amplituda jest prostopadła do kierunku propagacji **n** nie mogą się propagować w gazie idealnym.

Można również wyeliminować stałą  $A_{\rho}$ , dla której otrzymujemy

$$A_{\rho} = z \frac{\rho_0}{T_0} A_T. \tag{368}$$

Pozostaje do spełnienia związek

$$A_T \left( \frac{\omega^2}{k^2} - \frac{1+z}{z} \frac{R}{M_r} T_0 \right) = 0.$$
 (369)

A więc rozwiązania nietrywialne istnieją, gdy wyrażenie w nawiasie znika. To prowadzi do następującego związku dla fazowej prędkości propagacji

$$c_{ph} = \sqrt{\frac{\omega}{k}} = c_{ad}, \quad c_{ad} = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}, \quad \gamma = \frac{1+z}{z} = \frac{c_p}{c_v}.$$
 (370)

Oznacza to, że prędkość propagacji dźwięku w gazie idealnym  $c_{ad}$  nie zależy od częstotliwości fali – mówimy, że w takim ośrodku nie ma dyspersji. Dodatkowo liczba falowa k jest rzeczywista, co oznacza, że fale w tym ośrodku nie są tłumione. W powyższym wzorze

 $\gamma$  jest tzw. wykładnikiem adiabaty, a  $c_p, c_v$  oznaczają ciepła właściwe przy, odpowiednio, stałym ciśnieniu i stałej objętości.

Rozpatrzymy jeszcze ogólny przypadek równań propagacji, ale przy założeniu, że proces jest *izotermiczny*. W tym przypadku nie jest istotne równanie zachowania energii. Mamy więc

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p = 0 \quad \Rightarrow 
\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c_{is}^2 \nabla^2 p = 0, \quad c_{is} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}.$$
(371)

Otrzymujemy więc równanie falowe dla ciśnienia, w którym prędkość propagacji fal jest równa  $c_{is}$ . Jest to tzw. prędkość *izotermiczna*. Spełnia ona, oczywiście, związek

$$c_{ad} = c_{is}\sqrt{\gamma}. (372)$$

Jak wiemy (por. (47)) dla gazu idealnego mamy

$$\sqrt{\gamma} = \begin{cases}
1,29 & \text{dla gazów jednoatomowych} \\
1,18 & \text{dla gazów dwuatomowych} \\
1,15 & \text{dla gazów wieloatomowych.}
\end{cases}$$
(373)

Ponieważ przybliżenie adiabatyczne jest bliższe rzeczywistości, przyjęcie w obliczeniach prędkości izotermicznej oznacza, że przyjmujemy prędkość o przynajmniej 15% zbyt niską. Podstawienie danych dla powietrza (43), (45) w temperaturze 20° C daje

$$c_{is} = \sqrt{\frac{8,3143 \cdot 10^3}{28,96} \cdot 293} = 290 \text{ m/s.}$$
 (374)  
 $c_{ad} = 333,5 \text{ m/s.}$ 

# 7.5 Propagacja fal akustycznych w liniowych ośrodkach sprężystych

Przejdziemy teraz do opisu fal akustycznych w izotropowych ośrodkach liniowo sprężystych. Założymy, że procesy są izotermiczne. W przeciwieństwie do gazów jest to dla ciał stałych dobre przybliżenie i wynika z małej różnicy ciepeł właściwych przy stałym ciśnieniu i objętości dla ciał stałych (mały wpływ zmian objętości). W zwązku z tym ograniczymy się tylko do równań zachowania masy i pędu w przypadku małych deformacji

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, 
\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{div} \mathbf{T} = 0,$$
(375)

gdzie tensor naprężeń jest dany związkami Hooke'a

$$\mathbf{T} = \lambda \left( \text{tr } \mathbf{e} \right) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e}. \tag{376}$$

W związku tym  $\lambda, \mu$  są tzw. stałymi Lamé. Ich typowe wartości są podane w poniższej Tabeli.

**Tabela 28:** Przykładowe wartości stałych Lamé

	$\lambda \ [10^{10} Pa]$	$\mu \ [10^{10} Pa]$
aluminium	5,63	2,6
ołów	4,07	0,57
duraluminium	5,78	2,7
lód (-4 <sup>0</sup> C)	0,70	0,36
żelazo	10,49	8,2
miedź	10,63	4,55
marmur	4,15	2,7
mosiądz	8,90	3,6
plexiglas	0,28	0,12
polistyrol	0,28	0,12
stal	11,78	8,0

Tensor e jest tensorem małych deformacji, albo tzw. tensorem Almansi-Hamela. W układzie współrzędnych kartezjańskich związki te mają postać

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$
 (377)

a  $u_i$  są współrzędnymi wektora przemieszczeń **u**. Wprowadzanie tego wektora nie jest konieczne w teorii fal. Można go zastąpić dodatkowym równaniem, tzw. warunkiem całkowalności, który ma postać

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \tag{378}$$

gdzie  $v_i$  są współrzędnymi wektora prędkości  $\mathbf{v}$ . Związek ten jest tożsamością, jeśli wprowadzimy wektor przemieszczenia. Jednocześnie

$$\frac{\partial e_{kk}}{\partial t} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \text{ tzn. } \frac{\partial (\text{tr } \mathbf{e})}{\partial t} = \text{div } \mathbf{v}.$$
 (379)

Oznacza to

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \operatorname{tr} \mathbf{e} \right), \tag{380}$$

czyli zmiany gęstości masy są wyznaczone przez tensor deformacji i, tym samym, równanie bilansu masy jest spełnione tożsamościowo. Musimy rozważyć tylko równanie bilansu pędu. Problem redukuje się do następującego układu

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} - \lambda \frac{\partial e_{kk}}{\partial x_i} - 2\mu \frac{\partial e_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \tag{381}$$

Będziemy znów poszukiwali rozwiązań w postaci fal monochromatycznych

$$v_i = V_i e^{i(k_j x_j - \omega t)}, \quad e_{ij} = E_{ij} e^{i(k_j x_j - \omega t)},$$
 (382)

gdzie  $V_i, E_{ij}$  są stałymi amplitudami. Podstawienie w (381) prowadzi do następujących zależności

$$\rho_0 \omega V_i = -(\lambda E_{kk} k_i + 2\mu E_{ij} k_j),$$

$$\omega E_{ij} = -\frac{1}{2} (V_i k_j + V_j k_i).$$
(383)

Eliminacja amplitudy  $E_{ij}$  daje ostatecznie

$$\left(\rho_0 \omega^2 \delta_{ij} - \lambda k_i k_j - \mu \left(k_k k_k \delta_{ij} + k_i k_j\right)\right) V_j = 0. \tag{384}$$

Jest to znów problem na wartości własne. Rozwiązanie jest łatwiej skonstruować oddzielając problem w kierunku wektora propagacji  $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k, k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$  i w kierunku prostopadłym do  $\mathbf{n}$ .

Pomnóżmy równanie (384) przez wektor  $\mathbf{n}_{\perp}, \mathbf{n}_{\perp} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Otrzymujemy

$$\left(\rho_0 \omega^2 - \mu k_k k_k\right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\perp) = 0. \tag{385}$$

Równanie to ma nietrywialne rozwiązania jeśli

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}, \quad k = \sqrt{k_k k_k}. \tag{386}$$

A więc również w tym przypadku fale są niedyspersyjne (prędkość propagacji jest niezależna od częstotliwości) i nie występuje tłumienie (liczba falowa k jest rzeczywista). Ponieważ amplituda  $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_{\perp}$  jest prostopadła do kierunku propagacji  $\mathbf{n}$  fale takie nazywamy poprzecznymi (amg. transversal) lub ścinającymi.

Pomnożenie równania (384) przez wektor **n** prowadzi do związku

$$\left(\rho_0 \omega^2 - (\lambda + 2\mu) k_k k_k\right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$
(387)

Tym samym prędkość fazowa jest dana związkiem

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}. (388)$$

Te fale są więc również niedyspersyjne i nietłumione. Ponieważ amplituda jest skierowana w kierunku propagacji nazywa się je falami podłużnymi (ang. longitudinal).

# 7.6 Charakterystyka akustyczna fal

W poniższej Tabeli 29 zestawiamy wprowadzone do tej pory pojęcia charakteryzujące propagację fal akustycznych w gazach i ciałach stałych. Ponieważ przedstawione przykłady nie zawierają dysypacji energii fale te nie są tłumione. W obliczeniach odgrywa tłumienie bardzo ważną rolę i przedstawimy je oddzielnie. Wyjątkiem jest w Tabeli pojęcie współczynnika pochłaniania  $\alpha$ .

Tabela 29: Parametry charakteryzujące fale akustyczne

prędkość propagacji w gazach i cieczach idealnych	$c = \sqrt{z \frac{p}{\rho}},  c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$	[m/s]
prędkość propagacji w ciałach stałych	$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}},  c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	[m/s]
prędkość propagacji w prętach	$c = \sqrt{\frac{E}{ ho}}$	[m/s]
częstotliwość	$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T},  T - \text{okres}$	[1/s]
liczba falowa	k	[1/m]
długość fali	$\lambda = l = \frac{2\pi}{k}$	[m]
wektor falowy, kierunek propagacji	$\lambda = l = \frac{2\pi}{k}$ $\mathbf{k},  \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k},  k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$	
faza	$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t = k \left( \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - ct \right),  c = \frac{\omega}{k}$	
ciśnienie akustyczne	$p_a = \rho cv$	[Pa]
natężenie dźwięku	$J = p_a v = \frac{p_a^2}{\rho c} (= I)$	$\left[\mathrm{W/m}^2\right]$
moc akustyczna	$P_a = \int_S JdS$	[W]
impedancja	$Z = \rho c = \frac{p_a}{v}$	$[\mathrm{kg/m}^2\mathrm{s}]$
poziom ciśnienia akustycznego	$L_{p_a} = 20 \cdot \lg \frac{p_a}{p_0},  p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{Pa}$	[dB]
poziom natężenia dźwięku	$L_J = 10 \cdot \lg \frac{J}{I_0},  J_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$	[dB]
poziom mocy akustycznej	$L_{P_a} = 10 \cdot \lg \frac{P_a}{P_0},  P_0 = 10^{-12} \text{W}$	[dB]
współczynnik odbicia	$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2},$ $T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2},$	
współczynnik transmisji	$T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2},$	
współczynnik pochłaniania		
J – natężenie dźwięku padającego,	$\alpha = \frac{J_{ab}}{J} = 1 - \frac{J_{od}}{J},  J = J_{ab} + J_{od}$	
$J_{ab}$ – natężenie dźwięku pochłoniętego	-	
chłonność akustyczna	$A = \alpha \cdot S$	$[\mathrm{m}^2]$

**Tabela 30:** Długość fali akustycznej w powietrzu  $(\theta = 20^{\circ} \text{ C})$ 

Częstotliwość	16 Hz	20 Hz	100 Hz	1 kHz	10  kHz	16  kHz	20  kHz
Długość fali	21,2 m	17 m	3,4 m	$34~\mathrm{cm}$	$3,4~\mathrm{cm}$	$2,1~\mathrm{cm}$	$1.7~\mathrm{cm}$

W przypadku wystąpienia wielu źródeł dźwięku jednocześnie oblicza się całkowity poziom mocy akustycznej dla powierzchni S z warunku addytywności energii. Dla n źródeł mamy

$$P_{a} = \sum_{i=1}^{n} P_{a}^{i}, \quad P_{a}^{i} = P_{0} \cdot 10^{L_{P_{a}^{i}}/10} \implies$$

$$\Rightarrow \qquad L_{P_{a}} = 10 \cdot \lg \sum_{i=1}^{n} \left(10^{L_{P_{a}^{i}}/10}\right).$$
(389)

W szczególnym przypadku równej mocy akustycznej wszystkich źródeł mamy

$$L_{P_a^i} = L_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \left(10^{L_{P_a^i}/10}\right) = n \cdot 10^{L_1/10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L_{P_a} = L_1 + 10 \cdot \lg n. \tag{390}$$

W przypadku zmiennej w czasie mocy źródła wprowadza się wartość średnią na przedziale czasu T, w którym określa się intensywność dźwięku

$$L_m = 10 \cdot \lg\left(\frac{1}{T} \int_0^T 10^{L(t)/10} dt\right). \tag{391}$$

**Tabela 31:** Przykłady impedancji (T=20<sup>0</sup> C)

Ośrodek	Impedancja $[kg/m^2s]$
powietrze	408
tlen	452
chlor	660
woda	$1,44\cdot10^6$
kości	$6,1\cdot10^6$
stal	$45,6\cdot10^6$

## 7.7 Tłumienie

Rozpatrzmy najpierw prosty przykład. Zmodyfikujemy problem propagacji fali w nieskończenie długim pręcie sprężystym, który rozpatrywaliśmy w Rozdziale 7.1. i przyjmiemy, że pręt leży na sztywnym podłożu, stawiającym opór F

$$F = \eta v, \tag{392}$$

gdzie  $\eta$  jest współczynnikiem tarcia. Zasada zachowania pędu (341) ma wtedy postać

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \eta v. \tag{393}$$

Tym samym równanie dla przemieszczeń jest następujące

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \tag{394}$$

Szukamy rozwiązania tego równania w postaci fali monochromatycznej o częstotliwości  $\omega$ . Rozwiązanie to jest najłatwiej przedstawić w postaci zespolonej

$$u = Ae^{i(kx - \omega t)}, (395)$$

gdzie A jest zespoloną amplitudą, a k – zespoloną liczbą falową. Powyższy związek można również napisać w postaci

$$u = Ae^{-\operatorname{Im} k}e^{\operatorname{Re} k(x-c_{ph}t)}, \quad k = \operatorname{Re} k + i\operatorname{Im} k, \quad c_{ph} = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k}.$$
 (396)

A więc część rzeczywista liczby falowej Re k określa (fazowq) prędkość fali  $c_{ph}$ , tzn. prędkość propagacji fali o danej częstotliwości  $\omega$ , a część urojona Im k – malenie amplitudy w przestrzeni, czyli tlumienie, jeśli część ta jest dodatnia. Ujemna część urojona prowadziłaby do eksplozji rozwiązania.

Podstawienie (395) do (394) prowadzi do związku dyspersyjnego

$$c^{2}k^{2} - i\frac{\eta}{\rho}\omega - \omega^{2} = 0, (397)$$

który pozwala określić zależność liczby falowej od częstotliwości.

Wykorzystując związek dla pierwiastka z liczby zespolonej

$$\sqrt{a+ib} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a+\sqrt{a^2+b^2}}} \right], \tag{398}$$

otrzymujemy

$$c_{ph} = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k} = \frac{c}{\zeta}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \eta^2/\rho^2 \omega^2}}$$
 (399)

$$\operatorname{Im} k = \frac{\eta}{2\rho\zeta}.\tag{400}$$

Związek (399) pokazuje, że na skutek tarcia ( $\eta \neq 0$ ) prędkość fazowa  $c_{ph}$  jest zależna od częstotliwości (dyspersja!) i jedynie w przypadku fal o bardzo dużej częstotliwości jej wartość zmierza do c:  $\lim_{\omega \to \infty} \omega_{ph} = c$ . Również tłumienie fali Im k zależy od częstotliwości i zmienia się od zera dla  $\omega = 0$  (małe tłumienie dla małych częstotliwości) do  $\eta/2\rho$  dla nieskończenie dużych częstotliwości (maksimum tłumienia).

Rozpatrzmy teraz wpływ tłumienia na współczynnik transmisji przez granicę dwóch ośrodków. Dla uproszczenia rozpatrzymy ośrodek (1), w którym nie ma tłumienia, a jego własności są opisane tak, jak poprzednio przez gęstość masy  $\rho_1$ , moduł Younga  $E_1$ . Natomiast w ośrodku (2), który odbiera falę, występuje tłumienie, opisane stałą  $\eta$ . Rozwiązania szukamy w postaci fali monochromatycznej o częstotliwości  $\omega$ 

$$u_{1} = A_{1}e^{i(k_{1}x-\omega t)} + B_{1}e^{-i(k_{1}x+\omega t)}, \quad k_{1} = \frac{\omega}{c_{1}}, \quad c_{1} = \sqrt{\frac{E_{1}}{\rho_{1}}},$$

$$u_{2} = A_{2}e^{i(k_{2}x-\omega t)}, \quad \operatorname{Re} k_{2} = \frac{\omega}{c_{2}}\zeta, \quad \operatorname{Im} k = \frac{\eta}{2\rho_{2}\zeta}, \quad c_{2} = \sqrt{\frac{E_{2}}{\rho_{2}}}.$$

$$(401)$$

Warunki brzegowe są takie same, jak poprzednio. Ponieważ siła tarcia występuje w równaniu bilansu pędu jako siła zewnętrzna dla naprężeń obowiązuje w dalszym ciągu prawo Hooke'a. Zauważmy, że opis byłby inny, gdyby materiał był lepko-sprężysty, czyli gdyby pojawiło się tarcie wewnętrzne. Nie będziemy się zajmowali tym problem w tych notatkach. Podstawienie powyżych rozwiązań do warunków brzegowych prowadzi do relacji

$$A_1 + B_1 = A_2,$$
  
 $Z_1 (A_1 - B_1) = Z_2 A_2,$  (402)

gdzie

$$Z_1 = \rho_1 c_1, \quad Z_2 = \left(i \frac{\eta c_2}{2\rho_2 \zeta \omega} + \zeta\right) \rho_2 c_2.$$
 (403)

Układ (402) ma taką samą postać, jak (356), ale impedancja  $Z_2$  w pręcie z tarciem jest zespolona. Jej część urojona określa dysypację energii, a więc tłumienie fali. Jest ono zależne od częstotliwości.

W przypadku ogólnym dla materiału tłumiącego fale akustyczne wprowadza się pojęcie współczynnika pochłaniania dźwięku  $\alpha$  jako stosunek natężenia dźwięku w materiale tłumiącym (tzn. absorbującym falę; w naszym przykładzie jest to ośrodek (2))  $J_{ab}$  do całkowitego natężenia dźwięku J

 $\alpha = \frac{J_{ab}}{I}.\tag{404}$ 

Średnie wartości tego współczynnika w zależności od częstotliwości  $f=2\pi\omega$  są podane w Tabeli 32.

Tabela 32: Przykłady współczynnika pochłaniania (absorpcji) dźwięku  $\alpha$ 

Powietrze/Materiał	125 Hz	250 Hz	500 Hz	1 kHz	2 kHz	4 kHz
beton	0,01	0,01	0,01	0,015	0,02	0,02
podłoga drewniana	0,15	0,11	0,1	0,07	0,06	0,07
boazeria drew. na konstrukcji	0,3	0,25	0,2	0,17	0,15	0,1
50mm płyta porowata absorbująca	0,15	0,27	0,63	0,91	1	1
50mm wata szklana	0,26	0,6	0,95	1	1	1

Należy dodać, że na wielkość absorpcji dźwięku ma wpływ nie tylko struktura materiału (a więc dysypacja spowodowana przez własności lepkie, rozpraszanie na ściankach kanałów w ośrodkach porowatych, itd.), ale również struktura powierzchni materiału – jej chropowatość, wilgotność, itp.

# 7.8 Akustyka pomieszczeń

#### Intensywność źródeł

W praktyce istotne jest określenie poziomu natężenia dźwięku ze źródeł punktowych i liniowych.

1. Źródło dźwięku można traktować jako **punktowe** jeśli spełnia warunek (norma: DIN 18005, część I):  $l \leq 0.7s$  – patrz Rysunek 51. Obszarem emisji może być, na przykład, obszar przemysłowy.

Jeśli intensywność dźwięku  $L_1$  jest znana w odległości  $r_1$ , to intensywność dźwięku  $L_2$  w odległości  $r_2$  jest dana związkiem

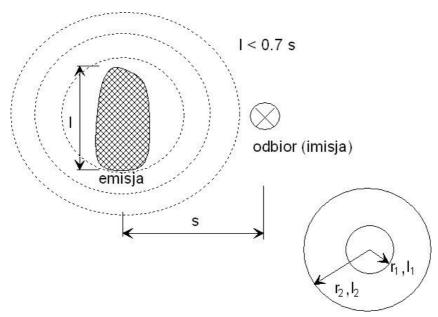
$$L_2 = L_1 - 10 \lg \frac{r_2^2}{r_1^2} \equiv L_1 - 20 \lg \frac{r_2}{r_1},$$
 (405)

który wynika z założenia, że fala dźwiękowa jest sferyczna (tzn. powierzchnie równej intensywności są powierzchniami sferycznymi). Jeśli natomiast znana jest intensywność  $L_w$  źródła zależność ma postać

$$L_2 = L_w - 10 \lg \frac{4\pi r_2^2}{r_0^2} = L_w - 20 \lg \frac{r_2}{r_0} - 10 \lg(4\pi) =$$

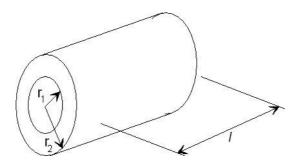
$$= L_w - 20 \lg r_2 - 11,$$
(406)

gdzie  $r_0 = 1$  m jest odległością porównawczą,  $r_2$  jest odległością w metrach, a wynik jest w decybelach (dB).



Rys. 51: Określenie źródła punktowego dźwięku.

2. Źródło dźwięku może być również **liniowe** (na przykład linia kolejowa, autostrada, itp.) Wtedy zakłada się, że powierzchnie równej intensywności są cylindryczne (por. Rys. 52).



Rys. 52: Źródło liniowe dźwięku

W tym przypadku intensywność określa się z jednego z następujących związków

$$L_2 = L_1 - 10\lg\frac{r_2}{r_1},\tag{407}$$

jeśli znana jest intensywność  $L_1$  w odległości  $r_1$ , lub

$$L_2 = L_w - 10 \lg \frac{2\pi r_2 l}{r_0} = L_w - 10 \lg \frac{r_2}{r_1} - 10 \lg 2\pi =$$

$$= L_w - 10 \lg r_2 - 8,$$
(408)

gdzie  $L_w$  jest znaną intensywnością źródła,  $r_0 = 1$  m jest odległością porównawczą,  $r_2$  – odległością odbiorcy w metrach, a wynik jest w decybelach (dB).

**Przykład.** Człowiek słyszy młot pneumatyczny z odległości r=19 m. Intensywność młota jest znana  $L_w=119$  dB. Intensywność odbieranego dźwięku

$$L = L_w - 20 \lg \frac{r}{r_0} = 82.5 \text{ dB}.$$

#### 3. Oddziaływanie źródeł.

Jak już określono poprzednio, na skutek addytywności mocy, całkowita intensywność dźwięku z n źródeł określa się przy pomocy związku

$$L_{calk} = 10 \lg \left( 10^{L_1/10} + 10^{L_n/10} \right).$$
 (409)

**Przykład.** Człowiek słyszy z odległości 30 m dwa młoty pneumatyczne o intensywności 90 dB w odległości 1 m i jednocześnie z odległości 50 m przejeżdżający pociąg o intensywności 85 dB w odległości 1 m. Jaka jest łączna intensywność odbieranego dźwięku?

$$L_{mlot} = 90 - 20 \lg \frac{30}{1} = 61 \text{ dB},$$
  
 $L_{pociag} = 85 - 10 \lg \frac{50}{1} = 68 \text{ dB},$   
 $L_{calk} = 10 \lg (2 * 10^{61/10} + 10^{68/10}) = 69, 5 \text{ dB}.$ 

#### 4. Tłumienie przez przegrody

Współczynnik transmisji  $\tau$  określa stosunek mocy dźwięku po przejściu przez przegrodę  $P_{\tau}$  do mocy  $P_e$  padającego dźwięku

$$\tau = \frac{P_{\tau}}{P_e}.\tag{410}$$

Współczynnik tłumienia R określa osłabienie intensywności na skutek pochłaniania i odbicia dźwięku przez przegrodę

$$R = 10 \lg \frac{P_e}{P_\tau} = 10 \lg \frac{1}{\tau}.$$
 (411)

W obliczeniach stosuje się często następujący półempiryczny wzór Bergera

$$R = 20 \lg \frac{\omega m'}{2Z_{pow}} - 3 \text{ dB},$$
 (412)

gdzie  $\omega = 2\pi f$  jest częstotliwością fali,  $m' = \rho d$  – masą powierzchniową (d – grubość przegrody), a  $Z_{pow} = \rho_{pow} c_{pow} \left[ \text{kg/m}^2 \text{s} \right]$  – impedancja powietrza.

Całkowite tłumienie przez przegrodę niejednorodną (np. z otworami) określa związek

$$R_{wyp} = -10 \lg \left( \frac{1}{S_{calk}} \sum_{i=1}^{n} S_i 10^{-R_i/10} \right), \tag{413}$$

gdzie  $S_i$  jest powierzchnią jednorodnej części przegrody,  $S_{calk} = \sum_{i=1}^{n} S_i$ .

#### 5. Wpływ częstotliwości

Obok intensywności dźwięku istotne znaczenie ma amplituda fal harmonicznych, odbieranych przez człowieka. Amplituda może być powiększona przez efekty rezonansowe, gdy częstotliwość fali dźwiękowej znajduje się w pobliżu częstotliwości giętnych drgań własnych przegrody  $f_G$ . W przybliżeniu **częstotliwość graniczna** jest dla przegród płaskich dana wzorem

$$f_G \approx \frac{60}{d} \sqrt{\frac{\rho}{E_{dyn}}},\tag{414}$$

gdzie  $E_{dyn}$  [MN/m²] jest dynamicznym modułem sprężystości przegrody,  $\rho$  [kg/m³] – jej gęstością masy, d [m] – grubością, a  $f_G$  – kołową częstotliwością drgań. Ta graniczna wartość powinna leżeć poza przedziałem 100 Hz – 2000 Hz, tzn.

$$f_G \le 100 \text{ Hz lub } f_G \ge 2000 \text{ Hz.}$$
 (415)

#### Przykład.

Rozważymy trzy przypadki przegrody gipsowej: pojedyńczą przegrodę o grubości d=12,5 mm, pojedyńczą przegrodę o grubości d=25 mm, i podwójną przegrodę  $2\times12,5$  mm. Dla gipsu  $E_{dyn}=3\times10^3$  MN/m²,  $\rho=900$  kg/m³. Częstotliwość fali, dla której sprawdza się przegrodę wynosi 569 Hz. Wtedy współczynniki tłumienia wynoszą odpowiednio

$$\begin{split} R_1 &= 20 \lg \left(900 \cdot 0,0125\right) + 20 \lg \frac{569}{2 \cdot Z_{pow}} = 21,0+9,7 \approx 31 < 37 \text{ dB}, \\ R_2 &= 20 \lg \left(900 \cdot 0,025\right) + 20 \lg \frac{569}{2 \cdot Z_{pow}} = 27,0+9,7 \approx 37 \text{ dB}, \\ R_3 &= 20 \lg \left(900 \cdot 2 \cdot 0,0125\right) + 20 \lg \frac{569}{2 \cdot Z_{pow}} = 27,0+9,7 \approx 37 \text{ dB}, \end{split}$$

gdzie dolna wartość graniczna 37 dB jest przepisana normą.

Z drugiej strony wartości częstotliwości granicznej są następujące

$$f_{G1} = \frac{60}{0,0125} \sqrt{\frac{900}{3 \cdot 10^3}} = 2629 \text{ Hz} > 2000 \text{ Hz},$$
  
 $f_{G2} = \frac{60}{0,025} \sqrt{\frac{900}{3 \cdot 10^3}} = 1314 \text{ Hz} < 2000 \text{ Hz i} > 100 \text{ Hz},$   
 $f_{G3} = f_{G1} > 2000 \text{ Hz}.$ 

W konsekwencji, jedynie trzecia przegroda spełnia oba warunki.

## 7.9 Reakcja człowieka na dźwięk

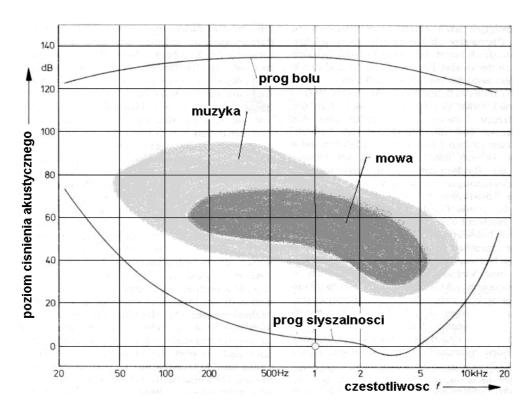
Reakcja człowieka na fale akustyczne zależy od częstotliwości fal (por. Stanisław Będkowski; *Akustyka budowli, ochrona przeciwdźwiękowa*, Politechnika Wrocławska, Wrocław, 1974). Wyróżniamy trzy podstawowe grupy:

- 1. infradźwięki o częstotliwościach poniżej słyszalnych przez człowieka,
- 2. dźwięki słyszalne w zakresia 16-16000 Hz,
- 3. ultradźwięki o częstotliwościach powyżej słyszalnych.

Drgania infraakustyczne (wibracje) odczuwane są głównie przez dotyk. Drgania słyszalne odbierane są przede wszystkim słuchem (częściowo przez przewodzenie kostne czaszki). Ultradźwięki nie są bezpośrednio odczuwalne, ale przy dużych natężeniach mogą być szkodliwe.

Na Rys. 53 pokazano obszar dźwięków słyszalnych w zależności od częstotliwości fali. Wrażenie głośności dźwięku jest wielkością subiektywną, której badanie wykonuje się przez porównanie z sygnałem odniesienia. Jako ton znormalizowany przyjęto dźwięk o

częstotliwości 1000 Hz. Na tej podstawie kreśli się krzywe równej głośności (*izofoniczne*), określające poziomy głośności dźwięku, tj.: wielkości wyrażonych w fonach i liczbowo pokrywających się z poziomami ciśnienia akustycznego w polu swobodnym fali płaskiej o częstotliwości 1000 Hz, które przy frontalnym odbiorze dwuusznym wywołuje takie samo wrażenie głośności jak dźwięk badany.



Rys. 53: Obszary słyszalności normalnego słuchacza dla tonów harmonicznych (sinusoidalnych).

# 7.10 Tłumienie dźwięku przez przegrody budowlane

Tabela 33: Dopuszczalny poziom hałasu

	Obszar	Poziom	Pokoje	Pomieszczenia	Pomieszczenia
	poziomu	zewnętrzny	szpitalne	mieszkalne	biurowe
	hałasu	hałasu, [dB]	[dB]	i sypialne [dB]	[dB]
1	Ι	do 55	35	30	-
2	II	56 do 60	35	30	30
3	III	61 do 65	40	35	30
4	IV	66 do 70	45	40	35
5	V	71 do 75	50	45	40
6	VI	76 do 80	*)	50	45
7	VII	>80	*)	*)	50

<sup>\*)</sup> zależne od warunków lokalnych

Ochrona przed przenoszeniem hałasu przez stropy przewiduje w przybliżeniu maksymalną wartość poziomu hałasu  $<55~\mathrm{dB}.$ 

Normy:

PN-70/B-02151 Akustyka budowlana. Ochrona przeciwdźwiękowa pomieszczeń. PN-61/B-02153 Akustyka budowlana. Nazwy i określenia.

## 8 Ochrona przeciwpożarowa

### 8.1 Spalanie

Spalanie jest złożonym ciągiem procesów chemicznych reakcji egzotermicznych pomiędzy paliwem i tlenem, któremu towarzyszy produkcja ciepła i światła w postaci albo żarzenia albo też płomienia.

Spalanie bezpośrednio w tlenie atmosferycznym jest reakcją, w której pośredniczą wolne rodniki, tzn. substancje z wolnymi elektronami na zewnętrznych powłokach<sup>9</sup>. Warunki do produkcji wolnych rodników są tworzone przez niekontrolowalne procesy termiczne, w których ciepło generowane przez spalanie jest konieczne do podtrzymania dostatecznie wysokiej temperatury do powstawania wolnych rodników.

W kompletnej reakcji spalania paliwo reaguje z elementem oksydującym, takim jak tlen lub fluor, a wynikiem spalania są związki elementów paliwa z elementami składnika oksydującego. Na przykład

$$C + O_2 \rightarrow CO_2,$$
  
 $CH_4 + 2O_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O,$   
 $CH_2S + 6F_2 \rightarrow CF_4 + 2HF + SF_6.$  (416)

W pierwszej z tych reakcji, jeśli węgiel jest w postaci ciała stałego, zostaje uwolniona energia 393,42 kJ/mol.

Innym prostym przykładem jest spalanie wodoru z tlenem, używane w silnikach rakietowyh

$$2H_2 + O_2 \to 2H_2O + \text{ciepto}.$$
 (417)

A więc wynikiem tej reakcji jest woda. W przypadku tej reakcji zostaje uwolniona energia 286,02 kJ/mol jeśli woda występuje w postaci cieczy, a 241,99 kJ/mol, jeśli woda występuje w postaci pary wodnej.

Większość elektronów w atomach i cząsteczkach występuje parami (po dwa na każdym orbitalu). Układ, w którym na jakimś orbitalu jest tylko jeden elektron jest zazwyczaj nietrwały i dąży do przyjęcia lub oddania elektronu - zwykle z udziałem innego atomu lub cząsteczki.

Rodniki są zwykle obojętne elektrycznie i zazwyczaj bardzo reaktywne. W "typowych" reakcjach z udziałem rodników ich stężenie w mieszaninie reakcyjnej jest zwykle dość niskie, ze względu na ich dużą reaktywność.

Najprostszym rodnikiem jest pojedynczy atom wodoru, który składa się z protonu i właśnie jednego, niesparowanego elektronu. Średni czas życia rodnika wodorowego, w gazowym wodorze w temperaturze pokojowej to ok. 2,5 nanosekundy - co oznacza, że statystycznie tyle czasu mija od powstania tego rodnika do jego związania z drugim rodnikiem i powstania zwykłej cząsteczki wodoru:  $H_2$ . Czasy życia rodników i ich reaktywność zależą od ich struktury. Trwałość rodników alkilowych rośnie wraz z ich rzędowością. Stabilizujący wpływ ma także sprzężenie z sąsiednimi grupami (np. z podwójnym wiązaniem)."

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup> Wikipedia: "Rodnik to cząsteczka posiadająca jeden lub więcej wolnych, niesparowanych elektronów. Innymi słowy, jest to cząsteczka (lub jon) o spinie elektronowym różnym od 0. Niektóre układy o całkowitym spinie równym 0, lecz wykazujące tzw. polaryzację spinową (np. niektóre stany przejściowe) czasem traktowane są jako dwurodniki.

W większości przypadków o znaczeniu praktycznym spalanie wykorzystuje tlen z powietrza, a wynikający stąd dym zawiera azot

$$CH_4 + 2O_2 + 7,52N_2 \rightarrow CO_2 + 2H_2O + 7,52N_2 + \text{cieplo}.$$
 (418)

A więc w przypadku spalania w powietrzu azot jest główną składową dymu.

Tabela 34: Typowe temperatury płomieni

Płomień wodorowy	2000°C i więcej (3645°F)
Płomień palnika Bunsena	$1300 \text{ do } 1600^{\circ}\text{C} (2372 \text{ do } 2912^{\circ}\text{F})$
Płomień lampy lutowniczej	$1300^{0}\text{C} (2372^{0}\text{F})$
Płomień świecy	$1000^{0}\text{C} (1832^{0}\text{F})$
Papieros	bez zaciągania: $400^{\circ}$ C ( $750^{\circ}$ F), w części środkowej $585^{\circ}$ C
	podczas zaciągania w części środkowej 700°C



Rys. 55: Płomień świecy

Tabela 35: Wygląd płomieni

czerwony	$\begin{array}{ccc} {\rm ledwo\ widoczny} & 525^{0}{\rm C} \\ {\rm ciemny} & 700^{0}{\rm C} \\ {\rm wiśniowy\ ciemny} & 800^{0}{\rm C} \\ {\rm wiśniowy} & 900^{0}{\rm C} \\ {\rm wiśniowy\ jasny} & 1000^{0}{\rm C} \end{array}$
pomarańczowy	głęboki $1100^{0}$ C jasny $1200^{0}$ C
biały	białawy 1300°C lśniący 1400°C oślepiający 1500°C

W rzeczywistości procesy spalania nigdy nie są doskonałe lub kompletne. W dymie powstającym przy spalaniu węgla i jego związków (np. węwglowodorów lub drewna) występują zarówno niespalony węgiel w popiołach jak i związki węgla takie jak CO. W przypadku spalania w powietrzu powstają również różne związki tlenu z azotem  $NO_x$ .

Przebieg reakcji spalania zależy głównie od dopływu tlenu do obszaru spalania. Z tego powodu najczęściej występuje przy spalaniu płomień dyfuzyjny, w którym dostateczny dopływ tlenu jest jedynie w obszarach zewnętrznych płomienia. Jeśli jednak paliwo zostanie dobrze wymieszane z tlenem pojawia się płomień wstępnie zmieszany o szczególnie intensywnym procesie spalania. Na Rys. 56 pokazano płomień w palniku Bunsena dla różnych intensywności doprowadzenia tlenu z powietrza.



Rys. 56: Różne kolory i kształty płomienia palnika Bunsena w zależności od ilości wpuszczanego powietrza:

1 brak powietrza, 2 niewiele powietrza, 3 dużo powietrza, 4 przepływ maksymalny.

W płomieniu dyfuzyjnym (z którym spotykamy się w przypadku np. świecy czy zapalniczki) można wyróżnić kilka warstw:

- -stożek wewnętrzny, zwany także strefą rozkładu. Następuje w nim rozkład cząsteczek paliwa (substancji spalanej) na atomy oraz wolne rodniki. Tworzy on niemal niewidoczną, świecącą słabym fioletowym światłem warstwę w dolnej części płomienia. Tutaj temperatura osiąga 800 °C.
- stożek środkowy, zwany strefą spalania niecałkowitego. Jest to najsilniej świecąca warstwa (to od niej pochodzi żółte światło świecy). Następuje w niej rozżarzanie cząsteczek węgla, które wracając do stanu podstawowego emitują kwanty światła. W strefie tej z powodu niedoboru tlenu nie może dojść do całkowitego utlenienia spalanej substancji, dlatego przedmioty, które znajdą się w tej warstwie są silnie redukowane. Z tego względu strefę tę zwie się płomieniem redukującym. Tutaj temperatura osiąga 900 950 °C.
- stożek zewnętrzny, zwany strefą spalania całkowitego. W tym znajdującym się na zewnątrz płomienia stożku świecącym słabym niebieskim światłem zachodzi całkowite spalanie paliwa. W wyniku wydzielania się ogromniej ilości energii stożek ten odznacza się najwyższą temperaturą. Panuje w nim pełny dostatek tlenu, a z powodu dużej ilości jego wolnych rodników substancje, które znajdą się w tym stożku są utleniane stąd jego nazwa płomień utleniający. W nim temperatura osiąga 1400 °C.

Szybkość procesu spalania zależy od szybkości reakcji. W klasycznym podejściu opisywanym w chemii zakłada się jednorodność układu, pomija procesy dyfuzyjne i, na przykład, dla następującej reakcji

$$aA + bB \rightarrow pP + qQ,$$
 (419)

gdzie a, b, p, q są współczynnikami stechiometrycznymi, A, B oznaczają reagujące substancje chemiczne (substraty), a P, Q są produktami tej reakcji, prędkość reakcji  $\lambda$  jest

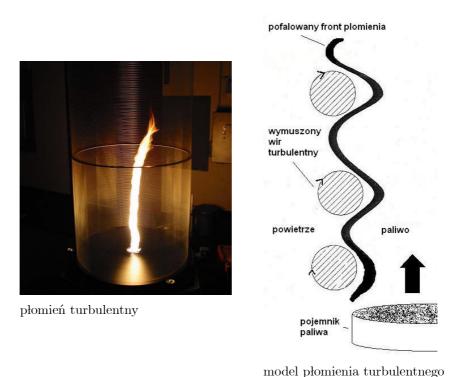
określona związkiem

$$\lambda = -\frac{1}{a}\frac{dc_A}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{dc_B}{dt} = \frac{1}{p}\frac{dc_P}{dt} = \frac{1}{q}\frac{dc_Q}{dt}.$$
 (420)

W tych wzorach  $c_A, c_B, c_P, c_Q$  jest koncentracją poszczególnych reagentów w zadanej stałej objętości, a układ jest izolowany.

Szybkość spalania zależy nie tylko od własności uczestniczących w nim substancji, ale również od warunków zewnętrznych, a w szczególności

- dopływu powietrza (zwiększenie dopływu zwiększa szybkość spalania, turbulentny ruch powietrza może doprowadzić do powstawania walców ogniowych),
- koncentracji tlenu (w powietrzu zwykle 21%, ale w urządzeniach specjalnych, np. komorach kesonowych lub przy wybuchu butli z tlenem, może być większa zwiększając szybkość spalania),
- powierzchni palącego się materiału (duża powierzchnia, np. pofalowana lub chropowata, zwiększa szybkość spalania),
- stopień nasycenia materiału palnego tlenem (np. duży w przypadku pyłów, co może prowadzić do wybuchowego charakteru spalania).



Rys. 57: Płomień turbulentny

Dramatycznym przykładem wpływu warunków zewnętrznych jest powstanie walca ogniowego. Występuje on, na przykład, w pożarach lasów lub dużych ciągów zabudowanych (np. pożar San Francisco w 1906 r. po trzęsieniu ziemi, lub pożar Drezna po bombardowaniu w 1943 r.). Zjawisko to pojawia się przy sprzężeniu procesu spalania mieszanki stechiometrycznej (patrz dalej) z turbulentnym ruchem powietrza, który

powoduje deformację płomienia i jego szybkie przenoszenie się. Jest to związane ze zwiększeniem powierzchni kontaktu płomienia z powietrzem. Na Rys. 57 pokazano eksperyment, w którym sztucznie wywołuje się płomień turbulentny poprzez rotację cylindrycznej siatki osłonowej. Na prawym Rysunku pokazano schemat modelowy takiego płomienia.

Poniżej przedstawimy elementy nowoczesnej teorii reakcji chemicznych, których przypadkiem szczególnym jest spalanie.

### 8.2 Reakcje chemiczne

Zacznijmy od prostego przykładu konstrukcji współczynników stechiometrycznych. Rozpatrzmy mieszaninę, która składa się z różnych kombinacji wodoru H i tlenu O. Takich podstawowych kombinacji jest sześć:  $H, O, H_2, O_2, OH, H_2O$ , a tym samym mieszanina jest sześcioskładnikowa. Mogą w niej zachodzić następujące reakcje chemiczne

$$H_{2} - 2H = 0,$$

$$O_{2} - 2O = 0,$$

$$H + O - OH = 0,$$

$$H + OH - H_{2}O = 0,$$

$$2H_{2} + O_{2} - 2H_{2}O = 0,$$

$$(\gamma_{\alpha}^{r}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$(421)$$

Macierz współczynników  $\gamma_{\alpha}^{r}$ , [-],  $\alpha=1,...,6$ , r=1,...,5 jest nazywana macierzą stechiometryczną. Jej rząd określa ilość niezależnych reakcji chemicznych. W powyższym przykładzie  $\nu=\mathrm{rank}\,(\gamma_{\alpha}^{r})=4$ . Zasada zachowania masy (molekularnej!) w każdej z tych reakcji prowadzi do związku

$$\sum_{\alpha=1}^{A} \gamma_{\alpha}^{r} M_{\alpha} \mu_{0} = 0, \quad r = 1, ..., R,$$
(422)

gdzie  $M_{\alpha}$  [-] jest masą molekularną reagenta  $\alpha$ ,  $\mu_0$  [kg] jest masą atomową wodoru, a R jest ilością reakcji. Oczywiście, związek (422) jest tylko innym sposobem zapisania związków (421).

Reakcje chemiczne mogą przebiegać w obu kierunkach. Nie oznacza to jednak ich termodynamicznej odwracalności. Przeciwnie, wszystkie reakcje prowadzą do wymiany ciepła, a to oznacza dysypację w układzie.

Oznaczmy ilość niezależnych reakcji przez  $\nu$ . Wkład każdego reagenta w danej reakcji na jednostkę czasu i objętości jest zadany przez szybkość reakcji, którą oznaczamy przez  $\lambda^r$ ,  $\left[1/\text{m}^3\text{s}\right]$ ,  $r=1,...,\nu$ . Jest ona równa zero w stanie równowagi termodynamicznej. Lokalne równanie bilansu masy dla każdego składnika (reagenta) ma postać

$$\frac{\partial \rho^{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} \rho^{\alpha} \mathbf{v}^{\alpha} = \hat{\rho}^{\alpha}, \tag{423}$$

gdzie  $\rho^{\alpha}$  jest gęstością masy składnika  $\alpha$ ,  $\mathbf{v}^{\alpha}$  jego prędkością, a  $\hat{\rho}^{\alpha}$  jest źródłem masy tego składnika. Wykorzystując pojęcie szybkości reakcji możemy to źródło napisać w postaci

$$\hat{\rho}^{\alpha} = \sum_{r=1}^{\nu} \gamma_{\alpha}^{r} M_{\alpha} \mu_{0} \lambda^{r}. \tag{424}$$

Wynika z tego związku następująca tożsamość

$$\sum_{\alpha=1}^{A} \hat{\rho}^{\alpha} = 0, \tag{425}$$

która odpowiada zasadzie zachowania masy w makroskopowej teorii mieszanin.

W przypadku jednorodnych mieszanin niedyfundujących ( $\mathbf{v}^{\alpha} \equiv \mathbf{0}$ ) równanie bilansu masy w układzie z jedną reakcją chemiczną o szybkości  $\lambda$  można napisać następująco

$$\frac{dm_{\alpha}}{dt} = \gamma_{\alpha} M_{\alpha} \mu_0 \lambda V \quad \Rightarrow \quad m_{\alpha} = m_{\alpha}^0 + \gamma_{\alpha} M_{\alpha} \mu_0 \int_{t_0}^t \lambda V dt, \tag{426}$$

gdzie V jest objętością układu,  $m_{\alpha}=\rho_{\alpha}V,\,m_{\alpha}^{0}$  masą składnika  $\alpha$  w chwili  $t_{0}$ . Wilekość

$$\Re = \int_{t_0}^t \lambda V dt, \tag{427}$$

nazywa się stopniem reakcji

$$m_{\alpha} = m_{\alpha}^0 + \gamma_{\alpha} M_{\alpha} \mu_0 \Re. \tag{428}$$

Jak widzimy,  $\Re$  [-] określa wszystkie masy składników w tej reakcji. Często wygodniej jest posługiwać się względnym stopniem reakcji

$$\mathfrak{r} = \frac{\Re}{A}, \quad A = 6,0237 \cdot 10^{23} - \text{liczba Avogadro.}$$
 (429)

Związki (426) prowadzą również do następujących tożsamości

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{N_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}} - \frac{N_{\beta}}{\gamma_{\beta}}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{N_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}} - \frac{N_{\beta}}{\gamma_{\beta}} = \frac{N_{\alpha}^{0}}{\gamma_{\alpha}} - \frac{N_{\beta}^{0}}{\gamma_{\beta}}, \quad N_{\alpha} = \frac{m_{\alpha}}{M_{\alpha}\mu_{0}}, \tag{430}$$

gdzie  $\frac{N_{\alpha}^{0}}{\gamma_{\alpha}}$ ,  $\frac{N_{\beta}^{0}}{\gamma_{\beta}}$  są ważonymi wartościami ilości cząstek w chwili  $t_{0}$ . Równoważnie, na podstawie prawa konstytutywnego dla gazu idealnego  $p_{\alpha} = N_{\alpha}kT/V$ , mamy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}} - \frac{p_{\beta}}{\gamma_{\beta}}\right) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{p_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}} - \frac{p_{\beta}}{\gamma_{\beta}} = \frac{p_{\alpha}^{0}}{\gamma_{\alpha}} - \frac{p_{\beta}^{0}}{\gamma_{\beta}}.$$
(431)

Przypomnijmy, że w mieszaninie dla stałej temperatury T i stałego ciśnienia p stan równowagi termodynamicznej jest wyznaczany przez minimum potencjału termodynamicznego, który nazywamy swobodną entalpią (funkcja energii swobodnej Gibbsa)

$$G = \sum_{\alpha=1}^{A} \mu_{\alpha} m_{\alpha}, \tag{432}$$

gdzie  $\mu_{\alpha}$  jest potencjałem chemicznym składnika  $\alpha$ . Mamy wtedy w stanie równowagi

$$\frac{\partial G}{\partial \Re}\Big|_{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\alpha=1}^{A} \sum_{\beta=1}^{A} \frac{\partial \mu_{\alpha}}{\partial m_{\beta}} m_{\alpha} \frac{dm_{\beta}}{d\Re}\Big|_{E} + \sum_{\alpha=1}^{A} \mu_{\alpha} \frac{dm_{\alpha}}{d\Re}\Big|_{E} = 0.$$
(433)

W wyniku zastosowania związku Gibbsa-Duhema (81)

$$\sum_{\beta=1}^{A} \frac{\partial \mu_{\alpha}}{\partial m_{\beta}} m_{\beta} = 0, \tag{434}$$

pierwszy człon znika. Otrzymujemy więc

$$\sum_{\alpha=1}^{A} \mu_{\alpha} \frac{dm_{\alpha}}{d\Re} \bigg|_{E} = \mu_{0} \sum_{\alpha=1}^{A} \mu_{\alpha} |_{E} \gamma_{\alpha} M_{\alpha} = 0.$$
 (435)

Jest to tzw. prawo działania mas.(prawo Guldberga i Waagego): Szybkość reakcji chemicznej jest proporcjonalna do efektywnego stężenia wszystkich uczestniczących w niej reagentów. Prawo to pozwala określić  $\Re$ , a tym samym  $m_{\alpha}$  w stanie równowagi termodynamicznej jako funkcje T i p. Wystarcza to do określenia całkowitego wyniku reakcji chemicznej, która przebiega pomiędzy zaburzeniem stanu w chwili  $t_0$  i końcowym stanem równowagi termodynamicznej w chwili t, gdy reakcja ustaje.

Dla mieszaniny gazów idealnych potencjał chemiczny  $\mu_{\alpha}$ jest dany związkiem

$$\mu_{\alpha} = \frac{\partial G}{\partial m_{\alpha}} = g_{\alpha} - \frac{RT}{M_{\alpha}} \ln \frac{p}{p_{\alpha}},\tag{436}$$

który wynika z (85). Podstawienie w (435) daje

$$\sum_{\alpha=1}^{A} \left[ (z_{\alpha} + 1) \frac{RT}{M_{\alpha}} + (\alpha_{\alpha} - T\beta_{\alpha}) - (z_{\alpha} + 1) \frac{RT}{M_{\alpha}} \ln T \right] \gamma_{\alpha} M_{\alpha} = -RT \sum_{\alpha=1}^{A} \gamma_{\alpha} \ln p_{\alpha}. \quad (437)$$

Zapiszemy ten związek w następującej postaci

$$\prod_{\alpha=1}^{A} (p_{\alpha})^{\gamma_{\alpha}} = K_p(T), \qquad (438)$$

gdzie

$$K_{p}(T) = T^{\sum_{\alpha=1}^{A} \gamma_{\alpha}(z_{\alpha}+1)} \exp \left[ -\sum_{\alpha=1}^{A} \left( \gamma_{\alpha} \frac{\alpha_{\alpha} - T\beta_{\alpha}}{RT/M_{\alpha}} + \gamma_{\alpha} (z_{\alpha}+1) \right) \right], \quad (439)$$

jest tzw. stałą chemiczną, która jest wielkością stabelaryzowaną. Zauważmy, że wartość stałej chemicznej zależy, obok temperatury T, od stałych energetycznych  $\alpha_{\alpha}$  i entropijnych  $\beta_{\alpha}$ , które w rozważanych poprzednio związkach termodynamicznych nie odgrywały żadnej roli. Odzwierciedlają one wpływ wiązań chemicznych na szybkość reakcji. Związek (438) jest jednym z równań układu, określającego ilościowo reakcję chemiczną. Składa się on z równań bilansu masy, prawa Daltona (uproszczona zasada zachowania pędu) i prawa działania mas (warunek równowagi termodynamicznej)

$$\frac{p_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}} - \frac{p_{\beta}}{\gamma_{\beta}} = \frac{p_{\alpha}^{0}}{\gamma_{\alpha}} - \frac{p_{\beta}^{0}}{\gamma_{\beta}}, \quad p = \sum_{\alpha=1}^{A} p_{\alpha}, \qquad (440)$$

$$\prod_{\alpha=1}^{A} (p_{\alpha})^{\gamma_{\alpha}} = K_{p}(T).$$

Poniżej przedstawiamy dwa przykłady analizy tego układu.

Stałą chemiczną  $K_p(T)$  można również powiązać z szybkością reakcji  $\lambda$ , a raczej jej wartością średnią  $\Re = \mathfrak{r}A = \int_{t_0}^t \lambda V dt$ . Pokażemy ten związek dla tzw. mieszaniny stechiometrycznej.

Rozpatrzmy pojedyńczą reakcję chemiczną opisywaną przez następujące równanie bilansu masy

$$\gamma_1 S_1 + \dots + \gamma_m S_m - \gamma_{m+1} S_{m+1} - \gamma_A S_A = 0, \tag{441}$$

gdzie m substratów jest w chwili początkowej w takim stosunku, jak ich współczynniki stechiometryczne, a A-m produktów w tej chwili początkowej jeszcze nie występuje

$$\frac{N_1^0}{\gamma_1} = \dots = \frac{N_m^0}{\gamma_m}, \quad N_{m+1}^0 = \dots = N_A^0 = 0.$$
 (442)

Taka mieszanina jest nazywana stechiometryczną.

Z równań bilansu masy (430) wynika

$$\frac{N_1}{\gamma_1} = \dots = \frac{N_m}{\gamma_m}, \quad \frac{N_{m+1}}{\gamma_{m+1}} = \dots = \frac{N_A}{\gamma_A}.$$
 (443)

Te związki określają stosunki ciśnień parcjalnych dla substratów (444)<sub>1</sub> i produktów (444)<sub>2</sub>

$$\frac{p_{1}}{p} = \frac{N_{1}}{N} = \gamma_{1} \frac{\frac{N_{1}}{\gamma_{1}}}{\frac{N_{1}}{\gamma_{1}} \Gamma_{m} + \frac{N_{m+1}}{\gamma_{m+1}} \Gamma_{A-m}}, \quad \text{itd.}, \quad \Gamma_{m} = \sum_{\beta=1}^{m} \gamma_{\beta}, \quad \Gamma_{A-m} = \sum_{\beta=m+1}^{A} \gamma_{\beta}, 
\frac{p_{m+1}}{p} = \frac{N_{m+1}}{N} = \gamma_{m+1} \frac{\frac{N_{m+1}}{\gamma_{m+1}} \Gamma_{A-m}}{\frac{N_{1}}{\gamma_{1}} \Gamma_{m} + \frac{N_{m+1}}{\gamma_{m+1}} \Gamma_{A-m}}, \quad \text{itd.}$$
(444)

Przyjmijmy, że w chwili początkowej  $N_1^0=\gamma_1 A,$  gdzie A jest liczbą Avogadro. Wtedy (428) daje

$$\frac{N_1}{\gamma_1} = \frac{N_1^0}{\gamma_1} - \mathfrak{r}A = (1 - \mathfrak{r}) A, \quad \frac{N_{m+1}}{\gamma_{m+1}} = \mathfrak{r}A. \tag{445}$$

Wykorzystując (443) i podstawiając do (444) otrzymujemy

$$\frac{p_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}p} = \frac{1-\mathfrak{r}}{\Gamma_m + (\Gamma_{A-m} - \Gamma_m)\mathfrak{r}}, \quad \alpha = 1, ..., m. 
\frac{p_{\alpha}}{\gamma_{\alpha}p} = \frac{\mathfrak{r}}{\Gamma_m + (\Gamma_{A-m} - \Gamma_m)\mathfrak{r}}, \quad \alpha = m+1, ..., A.$$
(446)

Podstawienie tych zależności w prawie działania mas (438) prowadzi do wyniku

$$K_{p}(T) = \frac{\prod_{\beta=1}^{m} (\gamma_{\beta})^{\gamma_{\beta}}}{\prod_{\delta=m+1}^{A} (\gamma_{\beta})^{\gamma_{\delta}}} \frac{(1-\mathfrak{r})^{\Gamma_{m}}}{\mathfrak{r}^{\Gamma_{A-m}}} \left(\frac{p}{\Gamma_{m} + (\Gamma_{A-m} - \Gamma_{m})\mathfrak{r}}\right)^{\Gamma_{m} - \Gamma_{A-m}}.$$
 (447)

Jest to zależność pomiędzy stałą chemiczną i szybkością reakcji dla różnych ciśnień p. Aby zrozumieć jej rolę rozpatrzmy następujący prosty przykład reakcji chemicznej

$$2CO_2 - 2CO - O_2 = 0. (448)$$

Mamy tu

$$\gamma_1 = 2, \quad \gamma_2 = 2, \quad \gamma_3 = 1,$$

$$\Gamma_m = 2, \quad \Gamma_{A-m} = 3,$$

$$K_p(T) = \frac{2^2}{2^2 1^1} \frac{(1-\mathfrak{r})^2}{\mathfrak{r}^3} \frac{(2+\mathfrak{r})}{p} \approx \frac{2}{p\mathfrak{r}^3}, \quad \text{dla } \mathfrak{r} \ll 1,$$
(449)

tzn.

$$\mathfrak{r} \approx \sqrt[3]{\frac{2}{pK_p}}.\tag{450}$$

Oznacza to, że rozpad  $CO_2$  jest wolniejszy przy podwyższonym ciśnieniu. Powrócimy dalej do tego przykładu.

Przechodzimy do dwóch przykładów wykorzystania układu równań (440).

1. Pierwszy przykład jest uproszczonym opisem syntezy amoniaku, zaproponowanej przez Habera i Boscha. Reakcja chemiczna zachodzi przy ustalonej temperaturze T i ciśnieniu p i ma postać

$$N_2 + 3H_2 - 2NH_3 = 0, (451)$$

i to równanie mówi nam, że, powiedzmy, jeden mol azotu cząsteczkowego  $N_{N_2}^0 = A$  (=28 g) w połączeniu z trzema molami wodoru cząsteczkowego  $N_{H_2}^0 = 3A$  (=6 g) tworzy dwa mole amoniaku. Równania bilansu masy mają postać

$$N_{N_2} + \frac{N_{NH_3}}{2} = A, \quad \frac{N_{H_2}}{3} + \frac{N_{NH_3}}{2} = A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad p_{N_2} + \frac{p_{NH_3}}{2} = \frac{AkT}{V}, \quad \frac{p_{H_2}}{3} + \frac{p_{NH_3}}{2} = \frac{AkT}{V}.$$
(452)

Prawo Daltona ma postać

$$p = p_{N_2} + p_{H_2} + p_{NH_3}. (453)$$

Prawo działania mas jest następujące

$$\frac{p_{N_2}p_{H_2}^3}{p_{NH_3}^2} = K_p(T). (454)$$

Z powyższych czterech równań należy określić  $p_{N_2}, p_{H_2}, p_{NH_3}$  i V. Po eliminacji otrzymujemy następujące równanie dla  $p_{NH_3}$ 

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4}\right)^2 (p - p_{NH_3})^2 = p_{NH_3} \sqrt{K_p(T)}.$$
 (455)

Zamiast podawać stałą chemiczną dla tej reakcji załóżmy, że w temperaturze  $T=298^0K$  i pod ciśnieniem p=200 bar ilość amoniaku, wytworzona w tej reakcji jest znana i

daje  $p_{NH_3}/p = 0.02$ . Wtedy równanie (455) określa stałą chemiczną dla tej temperatury. Otrzymujemy

$$K_p(T = 298^0K) = 9,73 \cdot 10^6 \text{ (bar)}^2.$$
 (456)

Dla tej samej temperatury, ale przy ciśnieniu p=300 bar równanie (455) prowadzi do następującego ciśnienia amoniaku:  $p_{NH_3}/p=0.03$ , czyli ten wzrost ciśnienia powiększa zawartość amoniaku w mieszaninie o 50%.

2. W drugim przykładzie określimy rozpad dwutlenku węgla na skutek wzrostu temperatury. Reakcja jest opisana równaniem

$$CO_2 - CO - \frac{1}{2}O_2 = 0.$$
 (457)

Załóżmy, że opisujemy rozpad jednego mola dwutlenku węgla. Równania mają wtedy postać

$$p_{CO} - p_{O_2} = 0, \quad p_{CO_2} + p_{CO} = \frac{AkT}{V},$$

$$p = p_{CO_2} + p_{CO} + p_{O_2},$$

$$\frac{p_{CO_2}}{p_{CO}\sqrt{p_{O_2}}} = K_p(T).$$
(458)

Eliminacja  $p_{O_2}, p_{CO_2}$  i V z tych równań prowadzi do następującego kubicznego równania dla  $\sqrt{p_{CO}/p}$ 

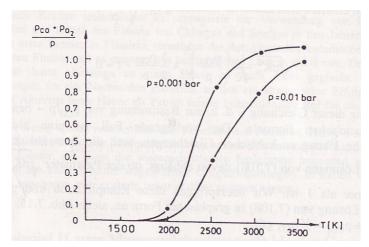
$$\sqrt{pK_p^2} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{p_{CO}}{p}\right)^{3/2} + \frac{3}{2} \frac{p_{CO}}{p} - 1 = 0.$$
 (459)

Równanie to można rozwiązać numerycznie dla różnych wartości stałej chemicznej, które podane sa w Tabeli 36.

**Tabela 36**: Stała chemiczna dla reakcji  $CO + 0.5O_2 = CO_2$  (wg. Ingo Müllera).

temperatura ${}^{0}K$	$\log K_p$
298,15	45,0437
500	25,0054
1000	10,1991
1500	5,2944
1750	3,9021
2000	2,8633
2500	1,4203
3000	0,5065
3500	-0,2012

Wynik analizy numerycznej przedstawiono na Rys. 58 dla dwóch wartości ciśnienia: 0.001 bar i 0.01 bar. Na osi pionowej naniesiono udział objętościowy produktów rozpadu  $(p_{CO} + p_{O_2})/p \equiv 3p_{CO}/2p$ . Jak widać, ten mechanizm powstawania tlenku węgla z dwutlenku węgla zaczyna być istotny dopiero we względnie wysokich temperaturach.



Rys. 58: Reakcja rozpadu CO<sub>2</sub> na CO i O<sub>2</sub> dla różnych temperatur

Ostatnie zagadnienie, związane z reakcjami chemicznymi jest zwązane z ciepłem reakcji. Ten problem odgrywa szczególnie ważną rolę w pożarnictwie. Przystępujemy do omówienia jego głównych aspektów teoretycznych.

Ciepło, konieczne do przebiegu reakcji chemicznej obliczamy z zasady zachowania energii (2). Równanie to, napisane dla procesu pomiędzy stanem początkowym i końcowym możemy dla gazów i cieczy napisać w dwóch równoważnych postaciach

$$E_{kon} - E_{pocz} = Q_V + p \left( V_{kon} - V_{pocz} \right),$$

$$H_{kon} - H_{pocz} = Q_p - V \left( p_{kon} - p_{pocz} \right),$$

$$(460)$$

gdzie H = E + pV jest entalpią. Pierwsza postać jest dogodna w procesach izochorycznych i określa ciepło reakcji  $Q_V$ , a druga w przypadku procesów izobarycznych i określa ciepło reakcji  $Q_p$ . W postaci lokalnej obliczenia przebiegają tak, jak w przypadku przemian fazowych (por. (254).

Rozpatrzmy jako przykład syntezę wody w procesie izobarycznym

$$2H_2 + O_2 - 2H_2O = 0. (461)$$

Entalpie właściwe są zadane związkami

$$h_{H_2} = \frac{7}{2} \frac{R}{M_{H_2}} (T - T_R) + \alpha_{H_2},$$

$$h_{O_2} = \frac{7}{2} \frac{R}{M_{O_2}} (T - T_R) + \alpha_{O_2},$$

$$h_{H_2O} = c_p (T - T_R) + \alpha_{H_2O},$$

$$(462)$$

jeśli powstaje para wodna. W przeciwnym wypadku trzeba uwzględnić zmiany ciśnienia. Jak widać, określenie ciepła reakcji wymaga znajomości stałych  $\alpha_{H_2}, \alpha_{O_2}, \alpha_{H_2O}$ . Te z kolei można wyznaczyć ze stałych chemicznych.

Określenie ciepła spalania ciał stałych wymaga bardziej skomplikowanych rozważań termodynamicznych. W zastosowaniach budowlanych wyznacza się je eksperymentalnie (por. Tabela 37).

Powyższe rozważania pomijają wpływ dyfuzji. Poza tym określenie wzrostu temperatury na skutek spalania wymaga rozwiązania lokalnego w czasie równania bilansu energii.

W ramach ogólnej makroskopowej teorii mieszynin R. Bowen skonstruował w 1968 model mieszaniny dyfundującej i reagującej chemicznie, które zawiera równanie bilansu energii. Nie będziemy się tym problemem zajmować w tych notatkach.

## 8.3 Charakterystyka pożarowa materiałów budowlanych<sup>10</sup>

Reakcja materiałów budowlanych na podwyższone temperatury jest związana nie tylko z ich własnościami chemicznymi i sposobem reakcji chemicznej z tlenem, ale również z charakterem elementu budowlanego, do którego ten materiał został zurzyty. W szczególności podwyższone temperatury mogą spowodować powstanie istotnych naprężeń termicznych, które z kolei wynikają z rozszerzalności termicznej materiałów, jak również istotne zmiany w deformacji elementów, wynikające z zależności własności mechanicznych materiałów (np. modułu sprężystości lub granicy plastyczności) od temperatury.

#### Wyroby ceramiczne

Ze względu na technologię ich wytwarzania materiały te cechuje duża odporność na działanie ognia. W wysokich temperaturach mogą jednak powstać pęknięcia spowodowane naprężeniami termicznymi. Takie szczeliny powietrzne nie obniżają w istotny sposób własności izolacyjnych tych materiałów ze względu na złe przewodnictwo cieplne powietrza. Zachowanie się w ogniu wyrobów ceramicznych jest lepsze niż materiałów kamiennych.

#### Szkło

Niezależnie od postaci (szkło taflowe płaskie walcowane i ciągnione, zespolone, cegły, pustaki, luksfery) szkło zaczyna mięknąć w temperaturach 500-600°C, a w temperaturze 900-1000°C topi się. Specjalne szkło borowo-krzemowe nie ma tych wad, ale jest zbyt drogie do powszechnego stosowania w budownictwie. Z tych powodów szkło nie powinno być stosowane w elementach budowlanych stanowiących oddzielenie pożarowe. Dotyczy to również szkła zbrojonego siatkami, gdyż, mimo, że przy spękaniu termicznym nie rozpada się na kawałki, przewodzi dobrze ciepło ( $\lambda=0,65~{\rm kcal/m\cdot h\cdot ^0C}$ ) i powoduje istotne efekty nagrzewania przez promieniowanie. Wełna szklana nie pali się, ale topi się również w temperaturze ok. 500°C.

#### Zaprawy budowlane

- **wapienne:** w ogniu wykazują niską wytrzymałość, bowiem zawarty w nich wodorotlenek wapniowy ulega rozkładowi w temperaturze 500°C na tlenek wapnia i wodę. Tynk wapienny pęka i odpada dużymi płatami.
- **cementowe:** mają podobne wady, ale z czasem zmniejsza się zawartość niezwiązanej wody i jakość ogniowa poprawia się. Najlepsze są zaprawy z cementu glinowego.
  - **cementowo-wapienne:** posiadają podobne wady, jak powyżej.
- gipsowe: w warunkach pożaru tworzywa gipsowe wykazują dużą wytrzymałość. Rozkład termiczny gipsu dwuwodnego ma jedynie charakter powierzchniowy. Znaczna część pochłoniętego ciepła zostaje zurzyta na odparowanie wody krystalizacyjnej, co chroni elementy przed wzrostem temperatury. Jest to proces powolny. Elementy konstrukcji budowlanych osłonięte tynkiem gipsowym lub wyłożone suchymi tynkami gipsowymi uzyskują znaczną odporność ogniową:
- 1. beton wiórowo-gipsowy: 3" (76,2 mm) 6 godzin odporności ogniowej, 2" (50,8 mm) 4 godziny odporności ogniowej,

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup>wg. P. Kamiński, *Charakterystyka pożarowa materiałów stosowanych w budownictwie - cz. II*, www.muratorplus.pl, 2007 (?).

- 2. bloki gipsowe pełne: 3"-6 godzin odporności ogniowej, 2"-4 godziny odporności ogniowej,
  - 3. bloki pustakowe: 3" 4 godziny odporności ogniowej,
  - 4. tynk na siatce metalowej: 3" 1 godzina odporności ogniowej,
  - 5. tynk gipsowy na suchym tynku V<sub>2</sub>" (12,77 mm) 2 godziny odporności ogniowej,
  - 6. tynk gipsowo-wermikulitowy na siatce metalowej 1" 2 godziny odporności ogniowej,
- 7. tynk gipsowo-wermikulitowy wzmocniony siatką metalową na suchym tynku 1,5" 4 godziny odporności ogniowej.

**Beton:** wytrzymałość betonów na działanie ognia jest taka, jak i zapraw cementowych. Wytrzymałość elementów budowlanych po ich ogrzaniu do  $500^{0}$ C spada o jedną czwartą, a przy  $650^{0}$ C o połowę. Mimo stosunkowo wysokiej przewodności cieplnej betonu ( $\lambda \sim 0, 30-1, 35 \text{ kcal/m·h·}^{0}$ C) temperatura krytyczna  $500^{0}$ C jest osiągana w większości wypadków przez zewnętrzne warstwy. Na skutek tego elementy budowlane betonowe i żelbetowe zachowują po pożarze dostateczną wytrzymałość nośną.

Stal budowlana: stal jest materiałem niepalnym. Praktycznie stal, której temperatura nie przekroczyła 800°C ulega zmianom odwracalnym. Przy wyższych temperaturach pojawiają sie deformacje trwałe (np. pęknięcia hartownicze), rekrystalizacja, osiadanie podciągów, wyboczenie słupów i wybrzuszenie blach. Dla oceny zachowania się stali w warunkach pożarowych nie tyle jest istotna jej wytrzymałość na rozciąganie, ile granica plastyczności, przy której należy się liczyć ze znacznymi i trwałymi deformacjami. Nośność stali walcowej obniża się w temperaturze 600°C o 25-30%. Dlatego też niezbędne jest, żeby elementy konstrukcyjne ze stali, a przynajmniej te, od których uzależniona jest stateczność budowli, były chronione przed niedopuszczalnym nagrzewaniem odpowiednio grubymi okładzinami lub innym materiałami ochronnymi, np. farbami pęczniejącymi. Szczególnie wrażliwe na działanie wysokich temperatur są elementy budowlane z betonu wstępnie sprężonego, w których występuje utrata sprężenia już przy temperaturach 200-300°C.

**Drewno:** jest zaliczane do materiałów palnych. Proces zwęglania następuje średnio z szybkością 4 cm na godzinę i zależy od gatunku. Szybkość rośnie w następującym uszeregowaniu: buk, brzoza, sosna, świerk. Drewno zapala się w temperaturze 150-170°C.

Płyty drewnopochodne: należą do grupy materiałów palnych. Bardzo groźne jest zjawisko bardzo szybkiego rozszerzania się płomieni po powierzchni płyt palnych.

**Trocinobeton:** zaliczany jest do materiałów niepalnych.

Obciążenie ogniowe określa ilość energii, jaka może zostać uwolniona na skutek spalania w odniesieniu do jednostki powierzchni pomieszczenia, strefy pożarowej lub składowiska materiałów. W obliczeniach należy uwzględnić materiały palne składowane, wytwarzane przerabiane lub transportowane w sposób ciągły przez dany obszar. Do obliczania obciążenia ognowego stosuje się wzór

$$Q_d = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^n Q_{cl}^i G_1^i, \tag{463}$$

gdzie n - liczba rodzajów materiałów palnych, znajdujących się w pomieszczeniu, strefie pożarowej lub składowisku,  $G_1$  - masa poszczególnych materiałów, A - powierzchnia rzutu poziomego pomieszczeniu, strefie pożarowej lub składowisku,  $Q_{cl}$  - ciepło spalania poszczególnych materiałów na jednostkę masy. Przykładowe wartości ciepła spalania podano w Tablicy 37.

 ${\bf Tabela~37}~({\rm wg.~P.~Kami\acute{n}ski}):~Ciepło~spalania~wybranych~materiałów$ 

Rodzaj materiału	$Q_{cl}$ [MJ/kg]	Rodzaj materiału	Q [MJ/kg]
aceton	31	acetylen	50
acetyloaminobenzen	31		
alkohole:	38 32	cetylowy etylowy metylowy	62 30 23
amylowy benzylowy butylowy	33 36	propylowy izopropylowy	34 31
aluminium (proszek, folie)	31	asfalt	40
bakelity	20	benzen	44
benzyna (średnio)	47	bitum	35
butan	46	butylen	49
celuloid	17	celuloza	18
drewno (wilgotn. do 12%)	18	drewno (wilgotn. ponad 12%)	15
dwusiarczek węgla	23	guma (średnio)	40
guma piankowa	37	koks	29
len (surowiec i wyroby)	15	linoleum	21
magnez	28	makaron	15
margaryna	31	masło	31
metan	57	nitrobenzen	25
oktan	48	opony gumowe	32
oleje: gazowe napęd., miner.	44 40	parafinowy	42
rycynowy	37	lniany	42
papier	16	pianka poliuretanowa (PU)	26
pleksiglas (PMN)	27	płyta wiórowa	18
poliamidy (PA)	29	polichlorek - wyroby plastyfik. (PCV)	25
Polichlorek winylu	21	poliester	31
poliester wzmacn. włóknem	21	polietylen i wyroby (PE)	42
polipropylen (PP)	43	polistyren i wyroby (PS)	42
poliuretany (PU)	25	poliwęglany (PC)	29
produkty naftowe (średnio)	44	propan	46
ropa naftowa	41	smary	41
smoła	35	szmaty (średnio)	19
tekstylia	19	tlenek wegla	10
tworzywa ABS	36	węgiel antracytowy	33
węgiel brunatny	22	węgiel drzewny	30
węgiel kamienny (średnio)	32		
żywica melaminowa	18	żywice karbamidowe	17

Przy obliczaniu obciążenia ogniowego nie bierze się pod uwagę: – materiałów palnych o zawartości wody ponad 60% lub zanurzonych w wodzie, – podłóg układanych na podłożu wykonanym z materiałów niepalnych, – stolarki budowlanej (okna, drzwi i klapy) osadzonej w elementach budowlanych wykonanych z materiałów niepalnych.

Poza tym redukuje się ilość materiału palnego, jeśli spełnione są następujące warunki. O 10% rzeczywistej masy w przypadkach:

- papier w rolach o średnicy co najmniej 0,5 m i długości co najmniej 1,0 m,
- papier w belach o wymiarach co najmniej 0,20 m×1,0 m×1,0 m,
- drewno okrągłe o średnicy co najmniej 0,2 m,
- węgiel kamienny i koks w pryzmach i zwałach o wysokości co najmniej 1,0 m,
- zboże, wysłodki buraczane itp. w stosach i pryzmach wysokości powyżej 1,0 m,
- płyty drewnopodobne, ułożone w stosy ściśle, bez przekładek, o wymiarach stosów  $1.0~\mathrm{m}\times1.0~\mathrm{m}\times1.0~\mathrm{m}$ ,
- zboże w zasiekach i komorach wykonanych z materiałów niepalnych, mrożonki owocowo-warzywne w kartonach, workach papierowych, foliowych, itp.,
- przetwory owocowo-warzywne w puszkach, słoikach, butelkach, złożone w paletach drewnianych, w tym foliowanych,
- napoje niegazowane i gazowane na paletach drewnianych (w tym foliowanych), w skrzynkach drewnianych, plastikowych, kartonach, składowane jako wyrób gotowy.
  - O 20 % rzeczywistej masy w przypadkach:
- zboże, cukier, mąka, kasze itp. w workach, ułożonych w stosy, warstwy, itp.; ograniczenie to nie dotyczy nasion oleistych,
  - papa smołowa i asfaltowa w rolkach,
- papier w procesach poligraficznych prasowany w ściśle ukształtowane paczki półproduktu (krudy) oraz jako produkt gotowy po obróbce introligatorskiej, w pełnopaletowych ładunkach o masie ponad 400 kg.

## 8.4 Wymagania ppoż dla budynków

W czasie projektowania budynku analizie z punktu widzenia zagrożenia pożarowego powinny być poddawane następujące czynniki:

- liczba kondygnacji budynku,
- wielkość stref pożarowych,
- obciążenie ogniowe,
- możliwość zwalczania pożaru,
- występowanie szczególnych niebezpieczeństw i trudności,
- skuteczność działania automatycznych instalacji gaśniczych,
- istnienie instalacji sygnalizacji pożarowej,
- działanie wyciągów do odprowadzania dymu i ciepła oraz występowanie klap dymowych.

Zgodnie z *Rozporządzeniem Ministra Spraw Wewnętrznych* z dnia 03.11.1992 (Dz. U. Nr. 92, poz.460 z dnia 10.12.1992 r.) budynki, ich części lub pomieszczenia ze względu na ich funkcję kwalifikuje się do **kategorii zagrożenia ludzi:** 

ZL I – budynki użyteczności publicznej lub ich części, w których mogą przebywać ludzie w grupach ponad 50 osób,

ZL II – budynki lub ich części przeznaczone do użytku ludzi o ograniczonej zdolnści poruszania się,

ZL III – szkoły, budynki biurowe, domy studenckie, internaty, hotele, ośrodki zdrowia, otwarte przychodnie lekarskie, sanatoria, lokale handlowo-usługowe, w których może przebywać do 50 osób, koszary, pomieszczenia ETO, zakłady karne i inne podobne,

ZL IV – budynki mieszkalne,

ZL V – archiwa, muzea i biblioteki.

Budynki mieszkalne, niezależnie od rodzaju zabudowy kwalifikuje się do kategorii zagrożenia ludzi ZL IV. Ta klasyfikacja oraz wysokość budynku (liczba kondygnacji) decydują o wymaganiach w zakresie odporności pożarowej, a tym samym o doborze materiałów pod względem palności, z jakich budynek może być zbudowany.

Odporność pożarowa budynków jest to umowny podział budynków na 5 klas, charakteryzujących budynki pod względem wymagań dla wyrobów budowlanych, stanowiących elementy składowe budynku. Klasy odporności pożarowej budynków oznaczone są literami A, B, C, D, E. Wymagania w zakresie odporności pożarowej budynków zestawiono w Tabeli 38.

Należy podkreślić, że wymagania w zakresie odporności pożarowej budynku nie precyzują jednoznacznie czasu, w jakim budynek nie powinien zostać zniszczony przez pożar. Klasa odporności pożarowej budynku narzuca wymagania w tym zakresie dla poszczególnych jego elementów.

Odporność ogniowa elementów budynku jest parametrem określającym w jednostkach czasu jego zdolność do spełnienia wymagań podczas pożaru. Element budowlany stanowi wyodrębnioną część konstrukcji budynku wraz ze stykami i połączeniami. Do elementów budynku zalicza się słupy, belki, stropy, ściany, sufity podwieszone, dachy, zamknięcia otworów itp.

Materiały ze względu na niepalność dzieli się na

- niepalne materiały, które w zdefiniowanych warukach badań nie ulegają procesowi spalania,
  - palne materialy, które nie zostały sklasyfikowane jako material niepalny.

Te ostatnie dzielą się na trzy stopnie palności:

- I stopień palności materiał niezapalny,
- II stopień palności materiał trudno zapalny,
- III stopień palności materiał łatwo palny.

Tabela 38: Wymagana (minimalna) odporność pożarowa budynków

Klasa	Budynki	Budynki zaliczane
odpor-	produkcyjne	do kategorii
ności	i magazynowe	zagrożenia ludzi ZL
A	budynki o max. obciążeniu ogniowym strefy poż. $\geq 4000~\mathrm{MJ/m}^2$	_
В	budynki o max. obciążeniu ogniowym strefy poż. $\geq$ 2000 i $\leq$ 4000 MJ/m <sup>2</sup> budynki (W) <sup>2)</sup> i (WW) <sup>1)</sup> $\leq$ 2000 MJ/m <sup>2</sup>	<ul> <li>a) liczące powyżej 2 kondygn.</li> <li>kategorii: ZL I, ZL II, ZL V</li> <li>b) wysokie (W)<sup>2)</sup></li> <li>i wysokościowe (WW)<sup>1)</sup></li> <li>c) wysokościowe (WW)<sup>1)</sup> kat. ZL IV</li> </ul>
С	budynki średniowysokie $(SW)^3$ o max. obciążeniu ogniowym strefy poż. $\leq 2000$ oraz budynki niskie $(N)^4$ o max. obciążeniu ogniowym strefy poż. $\geq 2000 \text{ MJ/m}^2$ i $\leq 2000 \text{ MJ/m}^2$	<ul> <li>a) 2-kondygnacyjne kategorii: ZL I, ZL II, ZL V</li> <li>b) powyżej 2 kondygnacji niskie i średniowysokie kat. ZL III</li> <li>c) powyżej 3 kondygnacji niskie średniowysokie i wysokie kat. ZL IV</li> </ul>
D	budynki niskie $(N)^4$ o max. obciążeniu ogniowym strefy poż. $\leq 1000 \text{ MJ/m}^2$	<ul><li>a) jednokondygnacyjne kat. ZL II</li><li>b) do 2 kondygnacji kat. ZL III</li><li>c) 3-kondygnacje kat. ZL IV</li></ul>
E	budynki jednorodzinne o max. obciążeniu ogniowym strefy poż. ≤500 MJ/m <sup>2</sup>	<ul> <li>a) jednokondygnacyjne</li> <li>z elementów nie rozprzestrz.</li> <li>ognia kat. ZL V</li> <li>b) do 2 kondygnacji kat. ZL IV</li> </ul>

 $<sup>^{1})</sup>$ wysokościowy (WW) – oznacza budynek powyżej 55 m nad poziom terenu,

**Uwaga 1:** Liczba kondygnacji nie obejmuje tutaj: piwnic, suteren. antresoli oraz poddaszy nieużytkowych

**Uwaga 2:** Wymagania dotyczące klasy odporności pożarowej budynków nie dotyczą budynków mieszkalnych o wysokości do 3 kondygnacji w zabudowie jednorodzinnej, zagrodowej, w gospodarstwach leśnych.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>) wysoki (W) – oznacza budynek o wysokości od 25 do 55 m włącznie nad poziomem terenu,

 $<sup>^3)</sup>$ średniowysoki (SW) – oznacza budynek o wysokościod 12 do 25 m włącznie nad poziomem terenu,

 $<sup>^4</sup>$ ) niski (N) – oznacza budynek o wysokości do 12 m nad poz. terenu, w tym bud. mieszk. do 4 kondygnacji włącznie.

**Tabela 39**: Odporność ogniowa elementów budynku w zależności od wymaganej klasy odporności pożarowej (minimalna odporność ogniowa i rozprzestrzenianie ognia)

Klasa odporn. pożar. bud.	Główna konstr. nośna	Rozp. ognia	Stropy	Rozp. ognia	Ścianki dział. Ścianki osłon.	Rozp. ognia	Dachy <sup>1)</sup> Tarasy	Rozp. ognia
A	240 min	NRO	120 min	NRO	$60  \mathrm{min}^{2)}$	NRO	30 min	NRO
В	120 min	NRO	60 min	NRO	$30  \mathrm{min}^{2)}$	NRO	30 min	NRO
С	60 min	NRO	60 min	NRO	$15  \mathrm{min}^{2)}$	NRO	15 min	NRO
D	30 min	NRO	30 min	NRO	(-)	$SRO^{3)}$	(-)	$SRO^{3)}$
Е	(-)	SRO	(-)	SRO	(-)	SRO	(-)	SRO

**Oznaczenia:** NRO – nierozprzestrzeniające ognia, SRO – słabo rozprzestrzeniające ogień, (-) – nie stawia się wymagań.

Należy dodać, że zarówno oznaczenia klas odporności pożarowej, jak i odporności ogniowe poszczególnych elementów budynku różnią się w różnych krajach. Motywacją dla różnicy w wymaganiach jest głównie czynnik kosztów – wraz ze wzrostem klasy rośnie znacznie koszt inwestycji. Dla poszczególnych elementów, takich jak drzwi lub okna różnica w kosztach może być nawet pięciokrotna.

Specjalne przepisy określają warunki dla dróg pożarowych i ewakuacyjnych. Nie będziemy ich tutaj cytować (por. Rozporządzenia Ministra Spraw Wewnętrznych w Dziennikach Ustaw z 1992, 1998 i 1999 r.).

Wymagania odporności ogniowej nie dotyczą naświetli dachowych, świetlików i okien poładowych, jeśli zastosowano je na powierzchni nie większej, niż 20% powierzchni połaci dachu

<sup>&</sup>lt;sup>2)</sup> Dla komór zsypów na odpadki – 60 min, drzwi – 30 min.

<sup>&</sup>lt;sup>3)</sup> Dla budynków kategorii ZL II jest wymagane NRO.

# Załącznik

Zamiana jednostek amerykańskich na SI

Wiele analiz konstrukcji budowlanych, które można znaleźć na amerykańskich stronach internetowych opiera się na starym anglosaskim układzie jednostek. Poniżej zestawiono ich definicje.

Aby zamienić: na: trzeba pomnożyć przez:

#### Długość

foot [ft] (stopa)	metr [m]	3,048 E-01
inch [in.] (cal)	metr [m]	2,54 E-02
inch [in.] (cal)	centymetr [cm]	2,54 E-00
micron [m]	metr [m]	1,0 E-06
yard [yd] (jard)	metr [m]	9,144 E-01

## Masa i moment bezwładności

kilogram-force second squared per meter $[kgf \cdot s^2/m]$	kilogram [kg]	9,80665 E+00
pound foot squared $[lb \cdot ft^2]$	kilogram metr kwadratowy $[kg \cdot m^2]$	4,214011 E-02
pound inch squared $[lb \cdot in.^2]$	kilogram metr kwadratowy $[kg \cdot m^2]$	2,926397 E-04
ton, metric [t]	kilogram [kg]	1,0 E+03
ton, short [2000 lb]	kilogram [kg]	9,071847 E+02

### Masa podzielona przez powierzchnię

pound per square foot [lb/ft <sup>2</sup> ]	kilogram na metr kwadratowy [kg/m <sup>2</sup> ]	4,882428 E+00
pound per square inch (not pound force!) [lb/in. <sup>2</sup> ]	kilogram na metr kwadratowy $\left[\mathrm{kg/m}^2\right]$	7,030696 E+02

### Masa dzielona przez długość

pound per foot [lb/ft]	kilogram na metr [kg/m]	1,488164 E+00
pound per inch [lb/in.]	kilogram na metr [kg/m]	1,785797 E+01
pound per yard [lb/yd]	kilogram na metr [kg/m]	4,960546 E-01

## Ciśnienie lub naprężenie (siła dzielona przez powierzchnię)

kilogram-force per square centemeter [kgf/cm <sup>2</sup> ]	pascal [Pa]	9,08665 E+04
kilogram-force per square meter [kgf/m <sup>2</sup> ]	pascal [Pa]	9,08665 E+00
kilogram-force per square milimeter [kgf/mm <sup>2</sup> ]	pascal [Pa]	9,08665 E+06
kip per square inch [ksi], [kip/in. <sup>2</sup> ]	pascal [Pa]	6,894757 E+06
kip per square inch [ksi], [kip/in. <sup>2</sup> ]	kilopascal [Pa]	6,894757 E+03
pound-force per square foot [lbf/ft <sup>2</sup> ]	pascal [Pa]	4,788026 E+01
pound-force per square inch [psi] [lbf/in. <sup>2</sup> ]	pascal [Pa]	6,894757 E+03
pound-force per square inch [psi] [lbf/in. <sup>2</sup> ]	kilopascal [Pa]	6,894757 E+00
psi (pound-force per square inch [lbf/in. <sup>2</sup> ])	pascal [Pa]	6,894757 E+03
psi (pound-force per square inch [lbf/in. <sup>2</sup> ])	kilopascal [Pa]	6,894757 E+00

## Powierzchnia

square foot	[ft <sup>2</sup> ] (stopa kwadratowa)	metr kwadratowy [m <sup>2</sup> ]	9,290304 E-02
square inch	[in. <sup>2</sup> ] (cal kwadratowy)	metr kwadratowy [m <sup>2</sup> ]	6,4516 E-04
square inch	[in. <sup>2</sup> ] (cal kwadratowy)	centymetr kwadratowy [m <sup>2</sup> ]	6,4516 E+00
square yard	[yd <sup>2</sup> ] (jard kwadratowy)	metr kwadratowy [m <sup>2</sup> ]	8,3612741 E-01

## Energia

kilowatt hour $[kW \cdot h]$ (kilowatogodzina)	joule [J]	3,6 E+06
quad [1015 BtulT]	joule [J]	1,055056 E+18
therm (US)	joule [J]	1,054804 E+08
ton of TNT	joule [J]	4,1084 E+09
watt hour $[W \cdot h]$ (watogodzina)	joule [J]	3,6 E+03
watt second $[W \cdot s]$ (watosekunda)	joule [J]	1,0 E+00

## Siła

dyne [dyn] (dyna)	newton [N]	1,0 E-05
kilogram-force [kgf]	newton [N]	9,80665 E+00
kilopond (kilogram-force) [kp]	newton [N]	9,80665 E+00
kip [1 kip=1000 lbf]	newton [N]	4,448222 E+03
kip [1 kip=1000 lbf]	kilonewton [kN]	4,448222 E+00
pound-force [lbf]	newton [N]	4,448222 E+00

Siła dzielona przez długość

1 C C [11 C/C/]	, [NT / ]	1 4F0200 E + 01
pound-force per foot [lbf/ft]	newton na metr  N/m	1,459390 E+01
1 C · -1 [11 C/: ]	- 1 INT / 1	1 751000 E + 00
pound-force per inch [lbf/in.]	newton na metr  N/m	1,751268 E+02

# Szybkość przepływu ciepła

calorieth per minute [calth/min]	wat [W]	6,973333 E-02
calorieth per second [calth/s]	wat [W]	4,184 E+00
kilocalorieth per minute [calth/min]	wat [W]	6,973333 E-01
kilocalorieth per second [calth/sec]	wat [W]	4,184 E+03

# Temperatura

degree Celsius [ <sup>0</sup> C]	stopnie Kelvina [ <sup>0</sup> K]	$T/^{0}K=t/^{0}C+273,15$
degree centigrade	stopnie Celsiusa [ <sup>0</sup> C]	$t/^{0}C=t/deg.cent$
degree Fahrenheit [ <sup>0</sup> F]	stopnie Celsiusa [ <sup>0</sup> C]	$t/^{0}C = (t/^{0}F-32)/1.8$
degree Fahrenheit [ <sup>0</sup> F]	stopnie Kelvina [ <sup>0</sup> K]	$T/^{0}K = (t/^{0}F + 459,67)/1,8$
kelvin [ <sup>0</sup> K]	stopnie Celsiusa [ <sup>0</sup> C]	$t/^{0}C=T/^{0}K-273,15$

# Prędkość

foot per second [ft/s]	metry na sekundę [m/s]	3,048 E-01
inch per second [in./s]	metry na sekundę [m/s]	2,54 E-02
kilometer per hour [km/h]	metry na sekundę [m/s]	2,777778 E-01
mile per hour [mi/h]	kilometry na godzinę [m/h]	1,609344 E+00
mile per minute [mi/min]	metry na sekundę [m/s]	2,68224 E+01

# Objętość

cubic foot [ft <sup>3</sup> ]	metr sześcienny [m <sup>3</sup> ]	2,831685 E-02
cubic inch [in. <sup>3</sup> ]	metr sześcienny [m <sup>3</sup> ]	1,638706 E-05
cubic yard [yd <sup>3</sup> ]	metr sześcienny [m <sup>3</sup> ]	7,645549 E-01
gallon (US) [gal]	metr sześcienny [m <sup>3</sup> ]	3,785412 E-03
gallon (US) [gal]	litr [L]	3,785412 E-00
liter [L]	metr sześcienny [m <sup>3</sup> ]	1,0 E-03
ounce (US fluid) [fl oz.]	metr sześcienny [m <sup>3</sup> ]	2,957353 E-05
ounce (US fluid) [fl oz.]	mililitr [mL]	2,957353 E+01

Prof.dr habil. Krzysztof Wilmański Instytut Budownictwa, Uniwersytet Zielonogórski



Semestr zimowy 2007/2008

Przedmiot: **FIZYKA BUDOWLI II** STUDIA DZIENNE (STUDIA MAGISTERSKIE)

Semestr 9

W	С	L	Р
2	1		

### Program ramowy

Podstawy termodynamiki chemicznej: termodynamika równowagowa, równanie Gibbsa, druga zasada termodynamiki, potencjały termodynamiczne. Wymiana masy w układach wieloskładnikowych. (4 godz + 2 godz)

Ciepło: równanie bilansu energii, równanie przewodnictwa cieplnego, warunki brzegowe i początkowe, rozwiązania ścisłe i przybliżone, rozwiązania stacjonarne. Bilans ciepła. Promieniowanie. Absorpcja, odbicie i przewodzenie ciepła. Wymiana ciepła między dwoma równoległymi płaszczyznami. Przewodzenie ciepła w ściance płaskiej wielowarstwowej. Przenikanie ciepła przez przegrody budowlane. (4 godzin + 6 godzin) Współczynniki przewodzenia i przejmowania ciepła, opory cieplne, współczynnik przenikania ciepła, gęstość strumienia ciepła, ilość ciepła, rozkłady temperatur w przegrodach, mostki cieplne. Stateczność cieplna pomieszczenia. (4 godz + 2 godz)

Wilgotność: podstawy termodynamiczne teorii gazów idealnych, równanie stanu. Równanie dyfuzji. Prawo Ficka. Ciśnienie nasycenia, wilgotność względna, temperatura skraplania, efekty dyfuzyjne. Transport wilgoci i ciepła w przegrodach budowlanych. (8 godz + 3 godz)

Dźwięk: pojęcie fali dźwiękowej, fale monochromatyczne, ich charakterystyka. Zakresy częstotliwości w fizyce budowli, pasma częstotliwości. Ciśnienie akustyczne, intensywność, wartości graniczne. Warunki brzegowe dla równania falowego, impedancja, absorpcja i odbicie dźwięku. Tłumienie dźwięku. ( $\mathbf{6} \ \mathbf{godz} + \mathbf{2} \ \mathbf{godz}$ )

Pożarnictwo: spalanie, teoria reakcji chemicznych, ciepło spalania, problemy ppoż. w budownictwie mieszkaniowym (4 godz.).

Krzysztof Wilmański http://www.mech-wilmanski.de Berlin, w styczniu 2008