

Lineare Thermoelastizität - Tischvorlage

Krzysztof Wilmanski
Universität Zielona Gora, <http://www.mech-wilmanski.de>

July 4, 2008

1 Einführung und Motivation

Das Ziel der linearen Elastizitätstheorie ist die Bestimmung der Felder: Verschiebung \mathbf{u} und absolute Temperatur T als Funktionen der Platzierung \mathbf{x} im Körper \mathcal{B} und in der Zeit t .

Mit Hilfe dieser Größen kann man durch Differenzierung und mit Materialgleichungen die Felder: Massendichte ρ , Geschwindigkeit \mathbf{v} , Verzerrung \mathbf{e} , Spannung \mathbf{T} , innere Energie ε , Wärmefluss \mathbf{q} , usw. bestimmen.

Die Auswirkung der Temperaturänderung ist im Rahmen des Bauwesens für die folgenden Anwendungsbereiche wichtig:

- 1) Wärmeausdehnung und thermische Spannungen in Konstruktionselementen, wie zum Beispiel in Brückenträgern, Schienen, Seilkonstruktionen, hängenden Dächern usw.
- 2) Bauphysik, besonders Wärmebrücken und Energiebilanz für Gebäude,
- 3) Änderung von Materialeigenschaften bei hohen Temperaturen, zum Beispiel bei Brand (Rekristallisierung, thermische Schädigung und Bruch usw.).

2 Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen

Für ein beliebiges Körperteil $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ gelten die folgenden *Erhaltungssätze*

1. *Masse*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho dv &= 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \oint_{\partial \mathcal{P}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right) dv &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho \right) + \rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

2. Impuls

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{v} dv = \oint_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{T} \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dv + \oint_{\partial \mathcal{P}} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}) \mathbf{n} ds - \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}) \right) dv = \int_{\mathcal{P}} \rho \mathbf{b} \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \mathbf{T}) = \rho \mathbf{b} \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \right) = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}. \tag{2}
\end{aligned}$$

3. Energie

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) dv = \oint_{\partial \mathcal{P}} (-\mathbf{q} + \mathbf{T} \mathbf{v}) \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{P}} \rho (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \int_{\mathcal{P}} \frac{\partial}{\partial t} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) + \operatorname{div} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + \varepsilon \right) \mathbf{v} + \mathbf{q} - \mathbf{T} \mathbf{v} \mathbf{n} \right] dv = \int_{\mathcal{P}} \rho (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + r) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \\
& \Rightarrow \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon \right) + \operatorname{div} \mathbf{q} = \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{v}) + \rho r. \tag{3}
\end{aligned}$$

In diesen Gleichungen bezeichnet $\partial \mathcal{P}$ die geschlossene Oberfläche der Menge \mathcal{P} , \mathbf{n} ist der Einheitsvektor in jedem Punkt senkrecht zur Fläche $\partial \mathcal{P}$, \mathbf{b} ist die Massenkraftdichte und r die Strahlungsdichte.

Die Größen

$$\dot{\rho} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho \right), \quad \dot{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} \right), \quad \dot{\varepsilon} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varepsilon \right), \tag{4}$$

sind Materialableitungen der Massendichte, des Impulses und der inneren Energie. Die Größe $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a}$ ist die Beschleunigung.

Der Drall-Erhaltungssatz führt zur Symmetrie des Spannungstensors: $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$.

Im kartesischen Bezugssystem haben diese Gleichungen die folgende Gestalt

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_k) = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \tag{5}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) v_k = \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} + \rho b_k, \quad \rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial t} = \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} + \rho_0 b_k, \tag{6}$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \varepsilon + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = T_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \rho r, \quad \rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} = \rho_0 r. \tag{7}$$

Auf der linken Seite dieser Relationen befindet sich die nichtlineare Darstellung, auf der rechten Seite die linearisierten Formen, die aus der Annahme folgen, dass die Abweichungen vom Anfangszustand klein sind (siehe unten). Die Größen $(\dots)_0$ sind Anfangswerte.

Allgemein gibt es in der Kontinuumsthermomechanik Größen, die Gleichungen dieser Art erfüllen, allerdings mit dem Unterschied, dass auf der rechten Seite noch eine Quelle steht. Solche Gleichungen nennt man *Bilanzgleichungen*. Im Weiteren wird eine solche Gleichung für die Entropie präsentiert.

3 Stoffgesetze

Zwischen den oben erwähnten Größen gelten in der linearen Theorie die folgenden kinematischen Beziehungen

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T \right), \quad \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T \right), \quad (8)$$

worin die letzte Beziehung eine sogenannte Integrabilitätsbedingung ist. Damit lässt sich auch die Änderung der Massendichte und die Änderung des Volumens bestimmen. In der linearen Theorie haben wir (siehe Gl. (5))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \right) &= \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial e_{kk}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \text{tr } \mathbf{e}}{\partial t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} = \text{tr } \mathbf{e}, \end{aligned} \quad (9)$$

d.h. die Massendichte ρ kann berechnet werden, wenn die Verzerrung \mathbf{e} bekannt ist. Diese ist dann bekannt, wenn die Verschiebung \mathbf{u} gefunden worden ist. Damit kann die Massenbilanzgleichung eliminiert werden und ρ ist kein unabhängiges Feld mehr. Die Volumenänderung folgt aus der folgenden Überlegung bezüglich einer kleinen Massenänderung

$$\int_{\mathcal{P}} \rho dv \approx \int_{\mathcal{P}} \underbrace{\rho J}_{\rho_0} dv_0 \Rightarrow \rho = \rho_0 J^{-1}, \quad dv = J dv_0, \quad (10)$$

worin J die Jacobi-Determinante für die Änderung der Koordinaten im Volumenintegral bezeichnet. Es folgt, dass die Volumenänderung durch die folgende Beziehung gegeben ist

$$J - 1 \approx \text{tr } \mathbf{e}. \quad (11)$$

In den oben angedeuteten Überlegungen wurde angenommen, dass die Abweichung des Systems vom Anfangszustand $\{\rho_0, \mathbf{e} = 0, T_0\}$ klein ist. Mathematisch formuliert müssen wir das Folgende annehmen

$$\max \left\{ \left| \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0} \right|, \|\mathbf{e}\|, \left| \frac{T - T_0}{T_0} \right| \right\} \ll 1, \quad (12)$$

wobei die Norm $\|\mathbf{e}\|$ folgendermaßen definiert ist

$$\|\mathbf{e}\| = \max \left\{ \left| \lambda^{(1)} \right|, \left| \lambda^{(2)} \right|, \left| \lambda^{(3)} \right| \right\}, \quad (13)$$

und $\lambda^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, 3$, die Hauptstreckungen (Eigenwerte) des Verzerrungstensors \mathbf{e} bezeichnen

$$\det \left(e_{kl} - \lambda^{(\alpha)} \delta_{kl} \right) = 0. \quad (14)$$

In der Thermomechanik wird angenommen, dass die Größen $\rho \mathbf{b}$, ρr gegeben sind. Sie können aus- und eingeschaltet werden. Damit kann man die Erhaltungssätze (5), (6), (7) in Feldgleichungen für ρ , \mathbf{u} , T umwandeln, wenn man die konstitutiven Größen \mathbf{T} , ε , \mathbf{q} als Funktionen von \mathbf{u} , T und deren Ableitungen vorschreibt. Diese *konstitutiven Beziehungen* (*Stoffgesetze*) definieren die Klasse derjenigen Stoffe, für welche das Modell gilt. Allgemein haben sie in der Thermomechanik der thermoelastischen Stoffe die folgende Gestalt

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{e}, T, \text{grad } T), \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{e}, T, \text{grad } T), \quad \mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{e}, T, \text{grad } T). \quad (15)$$

Die *konstitutiven Variablen* $\{\mathbf{e}, T, \text{grad } T\}$ enthalten nicht \mathbf{u} , \mathbf{v} , weil das sogenannte Objektivitätsprinzip es verbietet. Dieses Prinzip beschreibt die physikalische Eigenschaft, dass makroskopische Materialgesetze unabhängig von der Wahl des Beobachters sein sollen. Die Änderung des Beobachters (z.B. inertialer auf nicht-inertialer Beobachter) erscheint in den Impulsbilanzgleichungen nur als Zusatzkraft (Coriolis-, Zentrifugal-, Euler-Kräfte und Kraft der relativen Bewegung).

Wenn man die Stoffgesetze (15) in die Erhaltungssätze (5), (6), (7) einsetzt, erhält man Feldgleichungen, die mit Hilfe von Rand- und Anfangsbedingungen die Lösungen $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $T(\mathbf{x}, t)$ ergeben. Diese Lösungen werden *thermodynamische Prozesse* genannt. Im Weiteren zeigen wir Beispiele solcher Lösungen.

4 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Die Stoffgesetze dürfen nicht beliebig gewählt werden. Sie müssen zwei Prinzipien erfüllen: 1) *Objektivität* und 2) *thermodynamische Zulässigkeit*. Die Objektivität wurde schon angesprochen und wir werden sie in diesem Kurs nicht mehr erörtern. Die thermodynamische Zulässigkeit besteht hauptsächlich aus dem *zweiten Hauptsatz der Thermodynamik*:

Jeder thermodynamische Prozess muss die Entropieungleichung erfüllen

$$\frac{\partial \rho \eta}{\partial t} + \text{div}(\rho \eta \mathbf{v} + \mathbf{h}) \geq \rho s, \quad \eta = \eta(\mathbf{e}, T, \text{grad } T), \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}(\mathbf{e}, T, \text{grad } T). \quad (16)$$

In dieser Ungleichung bezeichnet η die Entropiedichte, \mathbf{h} ist der Entropiefluss, s ist die entropische Strahlung. Diese Ungleichung folgt aus der Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho \eta dv + \oint_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\mathcal{P}} \rho (s + \hat{\eta}) dv, \quad (17)$$

worin $\hat{\eta}$ die Entropieproduktion ist, die immer nichtnegativ sein muss. Daraus folgt die Ungleichung (16). Offensichtlich ist (17) eine Bilanzgleichung, aber kein Erhaltungssatz.

Die wichtigste Aufgabe der thermodynamischen Modellbildung ist die Auswertung des zweiten Hauptsatzes. Es gibt dafür verschiedene Methoden. In diesem Kurs verwenden wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Es ist nämlich einfach, die Auswertung durchzuführen, wenn die Felder \mathbf{u} , T völlig beliebig sind. Das ist in der Feldtheorie nicht der Fall, weil die Entropieungleichung des zweiten Hauptsatzes nur für thermodynamische Prozesse erfüllt sein muss. Dies bedeutet, dass \mathbf{u} , T die Feldgleichungen erfüllen müssen.

Um diese Einschränkung zu eliminieren, werden die Feldgleichungen als Zwangsbedingungen für Lösungen der Entropieungleichung behandelt. Man kann beweisen – dies ist das sogenannte Theorem von I-Shih Liu – das die folgende Aussage:

für alle Felder \mathbf{u} , T gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho \eta v_k + h_k) - \mathbf{\Lambda}^v \cdot \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) v_k - \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} \right] - \\ - \Lambda^\varepsilon \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right) \varepsilon + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - T_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

worin $\mathbf{\Lambda}^v, \Lambda^\varepsilon$ Funktionen der Variablen $\{\mathbf{e}, T, \text{grad } T\}$ sind,

äquivalent zum zweiten Hauptsatz ist.

Wir untersuchen den Fall der linearen Thermoelastizität genauer. Die Ungleichung (18) hat dann die Gestalt

$$\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{q_k}{T} \right) - \mathbf{\Lambda}_k^v \left[\rho_0 \frac{\partial v_k}{\partial t} - \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} \right] - \Lambda^\varepsilon \left[\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q_k}{\partial x_k} - T_{kl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \right] \geq 0, \quad (19)$$

worin wir angenommen haben, dass der Wärmefluss \mathbf{q} und der Entropiefluss \mathbf{h} die folgende Beziehung erfüllen

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{q}}{T}. \quad (20)$$

Diese Beziehung gilt nicht immer, aber für die klassische Thermomechanik kann sie bewiesen werden.

Es ist einfach zu sehen, dass die Ungleichung (19) bezüglich der Beschleunigung $\partial v_k / \partial t$ linear ist. Da diese Ungleichung für beliebige Felder gelten muss, können wir mit der richtigen Wahl der Beschleunigung diese Ungleichung immer verletzen. Daraus folgt, dass der Koeffizient der Beschleunigung verschwinden muss, d.h.

$$\mathbf{\Lambda}_k^v = 0. \quad (21)$$

Für die weitere Erörterung der Ungleichung benutzen wir unsere konstitutive Annahme und die Kettenregel der Differenziation. Es folgt

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[\frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial (\partial T / \partial x_k)} \frac{\partial (\partial T / \partial x_k)}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial e_{kl}} \frac{\partial e_{kl}}{\partial t} \right] + \\ - \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} q_k + \frac{1}{T} \left[\frac{\partial q_k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial (\partial T / \partial x_l)} \frac{\partial (\partial T / \partial x_l)}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial e_{lm}} \frac{\partial e_{lm}}{\partial x_k} \right] - \\ - \rho_0 \Lambda^\varepsilon \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial (\partial T / \partial x_k)} \frac{\partial (\partial T / \partial x_k)}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_{kl}} \frac{\partial e_{kl}}{\partial t} - T_{kl} \frac{\partial e_{kl}}{\partial t} \right] - \\ - \Lambda^\varepsilon \left[\frac{\partial q_k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial (\partial T / \partial x_l)} \frac{\partial (\partial T / \partial x_l)}{\partial x_k} + \frac{\partial q_k}{\partial e_{lm}} \frac{\partial e_{lm}}{\partial x_k} \right] \geq 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Diese Ungleichung ist linear bezüglich der Ableitungen

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial (\partial T / \partial x_k)}{\partial t}, \frac{\partial e_{kl}}{\partial t}, \frac{\partial e_{lm}}{\partial x_k} \right\}, \quad (23)$$

und sie ist nichtlinear bezüglich $\partial T/\partial x_k$. Dies bedeutet, dass die Koeffizienten der Ableitungen (22) verschwinden müssen und es bleibt eine Restungleichung übrig. Wir bekommen die folgenden Identitäten

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial T} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial (\partial T/\partial x_k)} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial (\partial T/\partial x_k)} &= 0, \\ \rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial e_{kl}} - \Lambda^\varepsilon \rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial e_{kl}} + \Lambda^\varepsilon T_{kl} &= 0, \\ \Lambda^\varepsilon &= \frac{1}{T},\end{aligned}\tag{24}$$

und es bleibt

$$-\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} q_k \geq 0.\tag{25}$$

Es ist günstig, die folgende Funktion einzuführen

$$\psi = \varepsilon - T\eta.\tag{26}$$

Damit haben die Beziehungen (24) die Gestalt

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \varepsilon = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \psi = \psi(T, \mathbf{e}), \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \mathbf{e}), \quad \eta = \eta(T, \mathbf{e}),\tag{27}$$

$$T_{kl} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial e_{kl}}.\tag{28}$$

Die Funktion ψ wird die *freie Helmholtzsche Energie* genannt. Wenn die konstitutive Beziehung für diese Funktion bekannt ist, können wir die konstitutiven Beziehungen für die innere Energie ε , die Entropie η und den Spannungstensor T_{kl} durch Differenzierung bestimmen. In diesem Sinn sagt man, dass ψ ein *thermodynamisches Potential* für die Variablen $\{T, e_{kl}\}$ ist.

Die thermodynamischen Beziehungen (27), (28) führen zu der folgenden Differenzialgleichung

$$d\eta = \frac{1}{T} \left(d\varepsilon - \frac{1}{\rho_0} T_{kl} de_{kl} \right).\tag{29}$$

Das ist die *Gibbssche Gleichung der Thermoelastizität*. Irrtümlich wird sie manchmal mit dem zweiten Hauptsatz identifiziert. Wir haben gesehen, dass außer den Identitäten (27), (28) auch die Ungleichung (25) bleibt, die man in der Form schreiben kann

$$\mathcal{D} = -\frac{\partial T}{\partial x_k} q_k \geq 0.\tag{30}$$

Die Funktion \mathcal{D} ist die *Dissipation*. Sie verschwindet im *thermodynamischen Gleichgewicht*. In unserem Fall bedeutet dies, dass der Temperaturgradient $\partial T/\partial x_k$ im Gleichgewicht gleich Null ist. Gleichzeitig bestimmt die Ungleichung (30) die *Stabilitätsbedingung des Gleichgewichts*, weil \mathcal{D} eine konvexe Funktion des Temperaturgradienten sein muss. In der linearen Theorie haben wir dann

$$q_k = -\lambda_{kl} \frac{\partial T}{\partial x_l},\tag{31}$$

worin die Matrix der Wärmeleitungskoeffizienten λ_{kl} positiv definit ist. Für thermisch isotrope Stoffe reduziert sie sich zum klassischen Fourier-Gesetz

$$q_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad \lambda > 0. \quad (32)$$

5 Feldgleichungen der linearen Thermoelastizität

Wir sind jetzt in der Lage, die Stoffgesetze für die lineare Thermoelastizität vollständig zu bestimmen. Wir setzen nämlich voraus, dass die Helmholtzsche Energie eine isotrope quadratische Funktion ist. Dann ist

$$\rho_0 \psi = -\frac{1}{2} \rho_0 \frac{c_v}{T_0} (T - T_0)^2 - \gamma (T - T_0) e_{kk} + \frac{1}{2} c_{ijkl} e_{ij} e_{kl}, \quad (33)$$

worin c_v die *spezifische Wärme* bezeichnet. γ ist der *Wärmeausdehnungskoeffizient* und c_{ijkl} ist die Matrix der Elastizitätskoeffizienten. Im allgemeinen anisotropen Fall besitzt diese Matrix 21 unabhängige Koeffizienten. Für isotrope Stoffe bleiben nur zwei davon übrig

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (34)$$

nämlich die Lamé Konstanten λ, μ (mit Wärmeleitungskoeffizienten nicht verwechseln!).

Nach Berücksichtigung der Identitäten (27) erhalten wir

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \approx c_v, \quad (35)$$

was tatsächlich die klassische Definition der spezifischen Wärme bei konstanter Dehnung ist. Im Gegensatz zu Gasen sind für Festkörper die spezifischen Wärmen bei konstanter Dehnung und bei konstantem Druck nahezu identisch.

Für die Spannung folgt die Beziehung (Duhamel-Neumann)

$$\tau_{kl} = \lambda e_{mm} \delta_{kl} + 2\mu e_{kl} - \gamma (T - T_0) \delta_{kl}, \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{T} = \lambda (\text{tr } \mathbf{e}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{e} - \gamma (T - T_0) \mathbf{1}. \quad (36)$$

Mit Hilfe dieser Stoffgesetze bekommen wir die Formel für den Druck

$$p = -\frac{1}{3} \tau_{kk} = -K \left(e_{kk} - \frac{\gamma}{K} (T - T_0) \right), \quad K = \lambda + \frac{2}{3} \mu, \quad (37)$$

$$\text{d.h.} \quad e_{kk} = \frac{\gamma}{K} (T - T_0) + \frac{\tau_{kk}}{3K},$$

worin K den Kompressibilitätsmodul bezeichnet. Diese Beziehung bedeutet, dass der Druck p sowohl durch Volumendeformation e_{kk} als auch durch thermische Volumendehnung $\gamma (T - T_0) / K$ erzeugt wird.

Die Stoffgesetze können einfach invertiert werden. Wir bekommen dann in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E} (\tau_{11} - \nu (\tau_{22} + \tau_{33})) + \alpha (T - T_0), \\ e_{22} &= \frac{1}{E} (\tau_{22} - \nu (\tau_{11} + \tau_{33})) + \alpha (T - T_0), \\ e_{33} &= \frac{1}{E} (\tau_{33} - \nu (\tau_{11} + \tau_{22})) + \alpha (T - T_0), \end{aligned} \quad (38)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2\mu}\tau_{12}, \quad e_{13} = \frac{1}{2\mu}\tau_{13}, \quad e_{23} = \frac{1}{2\mu}\tau_{23}, \quad (39)$$

worin

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}, \quad \alpha = \frac{\gamma}{3K}, \quad (40)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (41)$$

d.h. *Elastizitätsmodul, Poissonsche Querkontraktionszahl und Längenausdehnungskoeffizient* sind.

Tabelle 1: *Einige Lamé Konstanten*

	λ [10^{10}Pa]	μ [10^{10}Pa]
Aluminium	5.63	2.6
Blei	4.07	0.57
Duraluminium	5.78	2.7
Eis (-4°C)	0.70	0.36
Eisen	10.49	8.2
Kupfer	10.63	4.55
Marmor	4.15	2.7
Messing	8.90	3.6
Plexiglas	0.28	0.12
Polystyrol	0.28	0.12
Stahl	11.78	8.0

Der thermische Koeffizient γ/K ist normalerweise relativ stark von Temperatur abhängig, was wir in der linearen Theorie nicht berücksichtigen können. In Nachschlagwerken wird er üblicherweise mit Hilfe des Längenausdehnungskoeffizienten $\alpha = \gamma/3K$ gegeben. Der Faktor 3 erscheint, weil die Änderung der Länge mit 3 multipliziert werden muss, um in der linearen Theorie die Änderung des Volumens zu bekommen. Sie kommt in der oben gezeigten Invertierung automatisch vor. Die folgende Tabelle enthält einige Beispiele.

Tabelle 2: *Längenausdehnungskoeffizient α [$10^{-6}/^\circ\text{K}$]*

Aluminium	23.8	Gußeisen	11.8
Asphalt	200	Kalk, gebr., pulv.	20
Eis (0°C)	0.502	Marmor	11
Eisen	12.1	Polystyrol	$60 \div 80$
Glas, Pyrex	3.2	Porzellan	$3 \div 4$
Glas, Quarz	0.45	Sandstein	5
Granit	$3 \div 8$	Schamotte	5

Wir können jetzt das Gleichungssystem für die Felder \mathbf{u}, T in einer expliziten Form schreiben. Manchmal ist es günstig, äquivalent die Gleichungen für \mathbf{e}, \mathbf{v} , und T zu schreiben. Sie haben die Gestalt

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \lambda \text{grad}(\text{tr } \mathbf{e}) + 2\mu \text{div } \mathbf{e} - \gamma \text{grad } T + \rho_0 \mathbf{b},$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T \right),$$

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \text{div grad } T = \rho_0 r - \rho_0 T_0 \gamma \frac{\partial \text{tr } \mathbf{e}}{\partial t}. \quad (42)$$

Wenn wir doch die ursprünglichen Felder beschreiben wollen, bekommt man die folgenden Gleichungen

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \gamma \text{grad } T + \rho_0 \mathbf{b}, \quad (43)$$

$$\rho_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} - \lambda \text{div grad } T = \rho_0 r - \rho_0 T_0 \gamma \frac{\partial \text{div } \mathbf{u}}{\partial t}.$$

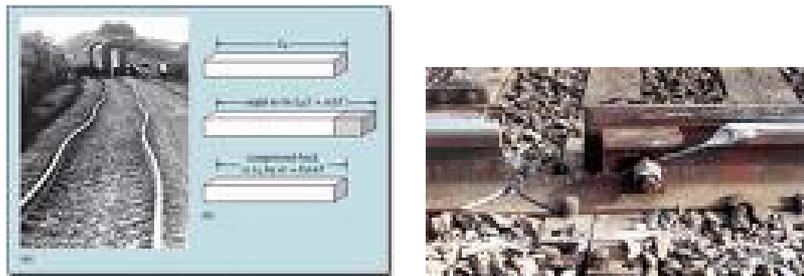
Um diese Gleichungen lösen zu können, brauchen wir Rand- und Anfangsbedingungen.

6 Thermospannung

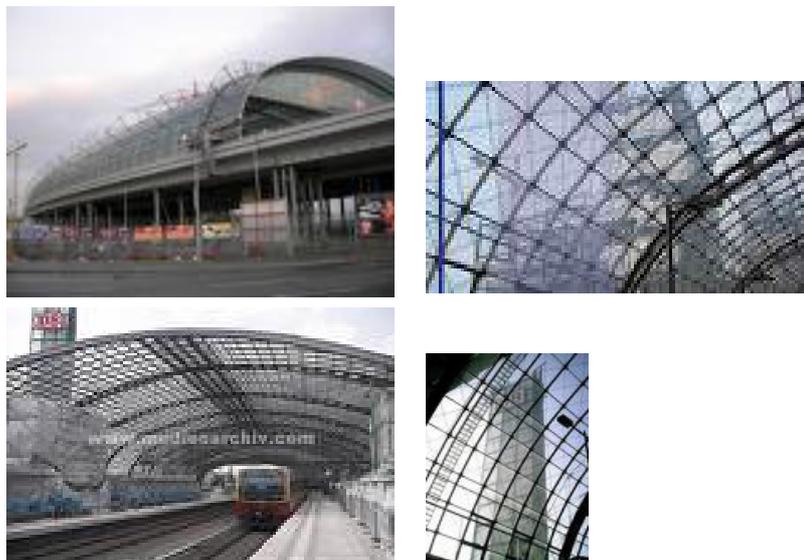
Thermische Dehnung und Biegung in Baukonstruktionen:

Die folgenden Strukturbeispiele verdeutlichen die Wichtigkeit der thermischen Analyse von Baukonstruktionen.

Thermische Verzerrung von Schienen – zerstörte Eisenbahnlinie (links) und Schädigung von Schienenverbindung durch thermische Belastung.



Lehrter Hauptbahnhof Berlin – Verschiebung des Glastunnels zwischen Winter- und Sommerzuständen ca. um 1 m. Es folgt die Spannung in Glasscheiben uä.



Beispiel 1:

Thermische Spannungen in einem eingespannten Stab aus Stahl (ebene Spannung),
 Materialparametern: $\alpha = 11.8 * 10^{-6} \text{ 1/}^\circ\text{K}$, $\lambda = 11.78 * 10^{10} \text{ Pa}$, $\mu = 8.00 * 10^{10} \text{ Pa}$.

Finde die Spannung.

Lösung: Bedingungen für ebene Spannung:

$$\tau_{22} = \tau_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_{22} = e_{33} = -\frac{\nu}{E}\tau_{11} + \alpha(T - T_0). \quad (44)$$

Gleichzeitig $e_{11} = 0$ (Einspannung!). Dann

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= 2\lambda \left(-\frac{\nu}{E}\tau_{11} + \alpha(T - T_0) \right) - \gamma(T - T_0) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \tau_{11} \left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \right) &= -\alpha(\lambda + 2\mu)(T - T_0) \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \tau_{11} = -\beta(T - T_0), \\ \beta &= \alpha \frac{\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda^2}{\mu(3\lambda + 2\mu)}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Für $T - T_0 = 40^\circ\text{K}$

$$\begin{aligned} \beta &= 2.45 * 10^6 \text{ Pa/}^\circ\text{K}, \\ \tau_{11} &= -0.98 * 10^8 \text{ Pa} = 98 \text{ MPa}. \end{aligned} \quad (46)$$

Beispiel 2:

Thermische Spannung in einem eingespannten Stab aus dem gleichen Stahl (ebene Spannung) der Höhe $d = 0.10 \text{ m}$ und Breite $b = 0.05 \text{ m}$, belastet durch eine Temperaturdifferenz zwischen $T_0 = 293^\circ\text{K}$ (oben) und $T_1 = 333^\circ\text{K}$ (unten). Finde die Spannungsverteilung, die resultierende Normalkraft und das Biegemoment.

Lösung:

Aus dem Energierhaltungssatz folgt es, dass die Komponente q_1 des Wärmeflusses konstant ist

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} = 0 \quad \xrightarrow{\text{Fourier-Gesetz}} \quad T = T_0 + (T_1 - T_0) \frac{x_1}{d}. \quad (47)$$

Spannungsverteilung (aus Formel (45))

$$\tau_{11} = -\beta(T_1 - T_0) \frac{x_1}{d}. \quad (48)$$

Diese Spannung kann man folgendermaßen spalten

$$\tau_{11} = -\frac{1}{2}\beta(T_1 - T_0) - \beta(T_1 - T_0) \left(\frac{x_1}{d} - \frac{1}{2} \right). \quad (49)$$

Offensichtlich führt der erste Teil zu der resultierenden Kraft N und der zweite Teil zu dem Biegemoment M

$$\begin{aligned} N &= -\frac{db}{2}\beta(T_1 - T_0) = 2.45 * 10^6 \text{ Pa}, \\ M &= \beta(T_1 - T_0) \frac{b * d^2}{12} = 4084 \text{ Nm}. \end{aligned} \quad (50)$$

Beispiel 3:

Spannung- und Temperaturverteilung im Raum belastet durch eine Wärmequelle (W. Nowacki; *A dynamical problem of thermoelasticity*, *Arch. Mech. Stos.*, **9**, 3, 325-334, 1957).

Lösung: Das Problem ist symmetrisch bezüglich den Punkt $R = 0$ in Kugelkoordinaten.

Temperaturverteilung

$$T(R, t) = T_0 + \frac{Q}{(4\pi\kappa t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa t}\right), \quad (51)$$

worin $\kappa = \lambda/c_v$, λ - Wärmeleitungskoeffizient (siehe: Fourier-Gesetz),

Spannungsverteilung

$$\begin{aligned} \tau_{RR} &= -\frac{4\mu}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial R} + \rho_0 \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \\ \tau_{\varphi\varphi} &= \tau_{\theta\theta} = -2\mu \left(\frac{1}{R} \frac{\partial\Phi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial R^2} \right) + \rho_0 \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}, \\ \tau_{R\varphi} &= \tau_{R\theta} = \tau_{\varphi\theta} = 0, \end{aligned} \quad (52)$$

worin

$$\Phi = \frac{\alpha(3\lambda + 2\mu)Q}{4\pi(\lambda + 2\mu)R} \left[E_1(R, t) + E_2(R, t) H\left(t - \frac{R}{c_L}\right) \right], \quad c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}, \quad (53)$$

$H(t - R/c_L)$ ist eine Heaviside-Stufenfunktion und

$$\begin{aligned} E_1(R, t) &= \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{4\kappa t}}\right) - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{c_L^2 t}{\kappa}\right) \left[\exp\left(\frac{Rc_L}{\kappa}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{4\kappa t}} + \sqrt{\frac{c_L^2 t}{\kappa}}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-\frac{Rc_L}{\kappa}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{R}{\sqrt{4\kappa t}} - \sqrt{\frac{c_L^2 t}{\kappa}}\right) \right], \end{aligned} \quad (54)$$

$$E_2(R, t) = \exp\left[\frac{c_L^2}{4\kappa^2} \left(4\kappa t - \frac{4R\kappa}{c_L}\right)\right] - 1. \quad (55)$$

Literaturhinweise:

K. Wilmanski; *Thermomechanics of Continua*, Springer, 1998,

W. Nowacki; *Thermoelasticity*, Pergamon Press, 1986,

E. Melan, H. Parkus; *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Wien, 1953.