

Thermodynamische Modellierung von komplexen Werkstoffen – Tischvorlage

Krzysztof Wilmanski

Universität Zielona Gora, <http://www.mech-wilmanski.de>

August 7, 2008

1 Einführung und Motivation

Zusätzliche lokale Freiheitsgrade (z.B. lokale Krümmung) sind nötig in der Modellbildung von den folgenden Systemen:

1. Suspensionen, molekulare Gase, Liquidkristalle, granulare Medien usw., wo die Drehung der Molekülen eine direkte physikale Interpretation besitzt,



Bild 1: Flüssigkristalle (*links – nematisch, rechts – smektisch*)



Bild 2: Granulare Medien

2. Systeme mit hoher Materialheterogenität (Biomechanik, insb. das Gewebe, Komposite mit stochastischer Stoffverteilung, hohe Gradienten der Materialeigenschaften, Übergangsbereiche zwischen zwei verschiedenen Stoffen, u.ä.),

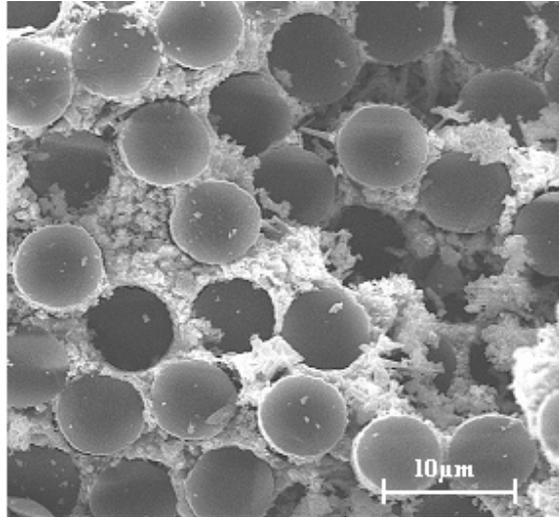


Bild 3: CSiC-Komposit

3. Numerik für verschiedene Strukturelemente (z.B. dicke Platten und Schalen), wo "locking"-Probleme entstehen.

Theoretische Methoden – Mikromechanik: höhere Gradienten, lokale Freiheitsgrade (z.B. der Winkel zusätzlich zur Verschiebung). Modelle: a) Grad \mathbf{F} , b) ϕ (Cosserat).

2 Erhaltungssätze und Bilanzgleichungen

Lagrangesche Beschreibung: Für ein beliebiges Körperteil $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ gelten die folgenden *Erhaltungssätze*

1. *Masse*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho_0 dv = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = 0.} \quad (1)$$

2. *Impuls*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho_0 \mathbf{v} dv = \oint_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{P} \mathbf{N} ds + \int_{\mathcal{P}} \rho_0 \mathbf{b} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \text{Div } \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}.} \quad (2)$$

3. Drall

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} (\rho_0 \mathbf{x} \times \mathbf{v} + \mathbf{J}_0 \mathbf{w}) dv &= \oint_{\partial \mathcal{P}} (\mathbf{x} \times \mathbf{PN} + \mathbf{MN}) ds + \int_{\mathcal{P}} \rho_0 (\mathbf{x} \times \mathbf{b} + \boldsymbol{\nu}) dv \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\mathcal{P}(t)} \left[\rho_0 \left(\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{x} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) + \mathbf{J} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right] dv + \\ &+ \oint_{\partial \mathcal{P}} (-\mathbf{x} \times \mathbf{PN} - \mathbf{MN}) ds - \int_{\mathcal{P}} \rho_0 (\mathbf{x} \times \mathbf{b} + \boldsymbol{\nu}) dv = \mathbf{0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{J_{ij}^0 \frac{\partial w_j}{\partial t} = \epsilon_{ijk} F_{jK} P_{kK} + \frac{\partial M_{iK}}{\partial X_K} + \rho_0 b_i, \quad w_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial t}.} \quad (3)$$

3. Energie

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho_0 \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \mathbf{J} \mathbf{w} + \varepsilon \right) dv &= \\ = \oint_{\partial \mathcal{P}} (-\mathbf{Q} + \mathbf{P}^T \mathbf{v} + \mathbf{M}^T \mathbf{w}) \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{P}} \rho_0 (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) dv &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{Q} = \mathbf{P}_{iK} \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_K} - \epsilon_{ijk} F_{jK} w_k \right) + M_{ik} \frac{\partial w_i}{\partial X_K} + \rho r.} \quad (4)$$

In diesen Gleichungen bezeichnet $\partial \mathcal{P}$ die geschlossene Oberfläche der Menge \mathcal{P} , \mathbf{N} ist der Einheitsvektor in jedem Punkt senkrecht zur Fläche $\partial \mathcal{P}$. Ansonsten

\mathbf{v} – Geschwindigkeit, \mathbf{w} – Drehgeschwindigkeit,

\mathbf{P} – Piola-Kirchhoff-Spannungstensor, \mathbf{M} – Lagrangescher Momentenspannungstensor,

ε – spezifische innere Energie,

\mathbf{Q} – Wärmefluß,

\mathbf{b} – Massenkraftdichte, $\boldsymbol{\nu}$ – Momentenkraftdichte, r – Strahlungsdichte.

Die oben dargestellten Gleichungen gelten sowohl in einem Inertialsystem als auch in einem nichtinertialen. Dies bedeutet, dass die Transformation des Bezugssystems (Isometrie des Bewegungsraum)

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{O}(t) \mathbf{x} + \mathbf{c}(t), \quad \mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}, \quad (5)$$

wo \mathbf{O} die Drehmatrix und \mathbf{c} die Verschiebung des Systems \mathbf{x}^* bezüglich \mathbf{x} bezeichnen, lässt die Gestalt der Gleichungen unverändert. Geändert werden nur Außenkräfte. Zum Beispiel, für die Massenkraft gilt

$$\rho_0 \mathbf{b}^* = \rho_0 \left[\mathbf{O} \mathbf{b} + 2\boldsymbol{\Omega} (\mathbf{v}^* - \dot{\mathbf{c}}) - \boldsymbol{\Omega}^2 (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} (\mathbf{x}^* - \mathbf{c}) + \ddot{\mathbf{c}} \right], \quad \boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^T. \quad (6)$$

Die zusätzlichen Beiträge zu dieser Kraft heißen Coriolis-, zentrifugal-, Euler-Kraft und die Kraft der relativen Bewegung. Im Weiterem werden nur Inertialsysteme verwendet.

Allgemein gibt es in der Kontinuumsthermomechanik Größen, die Gleichungen dieser Art erfüllen, allerdings mit dem Unterschied, dass auf der rechten Seite noch eine Quelle steht. Solche Gleichungen nennt man *Bilanzgleichungen*. Im Weiteren wird eine solche Gleichung für die Entropie präsentiert.

3 Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik

Die Modellbildung beruht auf einer Ergänzung der Bilanzgleichungen (Erhaltungssätze) mit *Stoffgesetzen (konstitutiven Beziehungen)*. Sie definieren die Klasse der Stoffe, die das Modell beschreibt. Zusammen führen sie zu dem *Feldgleichungssystem*.

Die Stoffgesetze dürfen nicht beliebig gewählt werden. Sie müssen zwei Prinzipien erfüllen: 1) *Objektivität* und 2) *thermodynamische Zulässigkeit*. Die Objektivität werden wir in diesem Kurs nicht erörtern. Die thermodynamische Zulässigkeit besteht hauptsächlich aus dem *zweiten Hauptsatz der Thermodynamik*.

Eine beliebige Lösung des Feldgleichungssystems wird der *thermodynamische Prozess* genannt.

Jeder thermodynamische Prozess muss die Entropieungleichung erfüllen

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{H} \geq 0.} \quad (7)$$

In dieser Ungleichung bezeichnet η die Entropiedichte, \mathbf{H} ist der Entropiefluss, die beiden erfüllen die Stoffgesetze, die die ausgewählte Materialklasse charakterisieren. Diese Ungleichung folgt aus der Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}} \rho_0 \eta dv + \oint_{\partial \mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot \mathbf{N} ds = \int_{\mathcal{P}} \rho_0 \hat{\eta} dv, \quad (8)$$

worin $\hat{\eta}$ die Entropieproduktion ist, die immer nichtnegativ sein muss. Daraus folgt die Ungleichung (7). Offensichtlich ist (8) eine Bilanzgleichung, aber kein Erhaltungssatz.

Die wichtigste Aufgabe der thermodynamischen Modellbildung ist die Auswertung des zweiten Hauptsatzes. Es gibt dafür verschiedene Methoden. In diesem Kurs verwenden wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Es ist nämlich einfach, die Auswertung durchzuführen, wenn die Felder völlig beliebig sind. Das ist in der Feldtheorie nicht der Fall, weil die Entropieungleichung des zweiten Hauptsatzes nur für thermodynamische Prozesse erfüllt sein muss. Dies bedeutet, dass die Felder die Feldgleichungen erfüllen müssen. Um diese Einschränkung zu eliminieren, werden die Feldgleichungen als Zwangsbedingungen für Lösungen der Entropieungleichung behandelt.

4 Klassische Thermoelastizität

Um das Vorgehen bei die Auswertung des zweiten Hauptsatzes zu demonstrieren, wir erörtern die Klasse der klassischen thermoelastischen Stoffen. In der Lagrangeschen Beschrei-

bung werden die Felder der Bewegungsfunktion

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \quad (9)$$

und der absoluten Temperatur

$$T = T(\mathbf{X}, t), \quad (10)$$

gesucht. Sie erfüllen die Feldgleichungen, die aus Erhaltungssätzen

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \text{Div } \mathbf{P}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}, \\ \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon + \frac{1}{2} v^2 \right) &= \text{Div} (\mathbf{P}^T \mathbf{v} - \mathbf{Q}), \end{aligned} \quad (11)$$

und Stoffgesetzen

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}(\mathbf{F}, T, \mathbf{G}), \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{F}, T, \mathbf{G}), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{F}, T, \mathbf{G}), \\ \mathbf{F} &= \text{Grad } \mathbf{f}, \quad \mathbf{G} = \text{Grad } T, \end{aligned} \quad (12)$$

folgen.

Man kann beweisen – dies ist das sogenannte Theorem von I-Shih Liu – das die folgende Aussage:

für alle Felder \mathbf{f} , T gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{H} - \Lambda^v \cdot \left[\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \text{Div } \mathbf{P} \right] - \\ - \Lambda^\varepsilon \left[\rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{Div } \mathbf{Q} - \mathbf{P}^T \text{Grad } \mathbf{v} \right] \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

worin $\Lambda^v, \Lambda^\varepsilon$ Funktionen der Variablen $\{\mathbf{e}, T, \text{grad } T\}$ sind,

äquivalent zum zweiten Hauptsatz ist.

Es ist einfach zu sehen, dass die Ungleichung (13) bezüglich der Beschleunigung $\partial \mathbf{v} / \partial t$ linear ist. Da diese Ungleichung für beliebige Felder gelten muss, können wir mit der richtigen Wahl der Beschleunigung diese Ungleichung immer verletzen. Daraus folgt, dass der Koeffizient der Beschleunigung verschwinden muss, d.h.

$$\Lambda^v = 0. \quad (14)$$

Für die weitere Erörterung der Ungleichung benutzen wir unsere konstitutive Annahme und die Kettenregel der Differenziation. Es folgt

$$\begin{aligned} \rho_0 \left[\frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{G}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right] + \\ + \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \cdot \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{G}} \right)^T \cdot \text{Grad } \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\frac{12}{T}} \cdot \text{Grad } \mathbf{F} \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\rho_0 \Lambda^\varepsilon \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right] - \\
& -\Lambda^\varepsilon \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial T} \cdot \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{G}} \right)^T \cdot \text{Grad } \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\frac{12}{T}} \cdot \text{Grad } \mathbf{F} \right] \geq 0, \quad (15)
\end{aligned}$$

worin

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{G}} \right)^T \cdot \text{Grad } \mathbf{G} = \frac{\partial H_K}{\partial G_L} \frac{\partial G_K}{\partial X_L}, \quad \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\frac{12}{T}} \cdot \text{Grad } \mathbf{F} = \frac{\partial H_K}{\partial F_{kL}} \frac{\partial F_{kL}}{\partial X_K}, \quad \text{usw.}$$

Diese Ungleichung ist linear bezüglich der Ableitungen

$$\left\{ \frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}, \text{Grad } \mathbf{F}, \text{Grad } \mathbf{G} \right\}, \quad (16)$$

und sie ist nichtlinear bezüglich \mathbf{G} . Dies bedeutet, dass die Koeffizienten der Ableitungen (16) verschwinden müssen und es bleibt eine Restungleichung übrig. Wir bekommen die folgenden Identitäten

$$\frac{\partial \eta}{\partial T} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{G}} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} = 0,$$

$$\rho_0 \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{F}} - \Lambda^\varepsilon \rho_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}} + \Lambda^\varepsilon \mathbf{P} = 0, \quad (17)$$

$$\text{sym} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{G}} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{G}} \right) = 0, \quad \text{sym}_{13} \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{F}} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{F}} \right) = 0, \quad (18)$$

und es bleibt

$$\left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial T} \right) \cdot \mathbf{G} \geq 0. \quad (19)$$

Die Auswertung der Identitäten (18) ist einfach, wenn wir die Isotropie des Stoffes annehmen. In diesem Beispiel vereinfachen wir die Darstellungen noch weiter und verlangen, dass die Flüsse \mathbf{Q} und \mathbf{H} linear bezüglich \mathbf{G} sind. Wir erhalten

$$\mathbf{Q} = -K(T, \mathbf{F}) \mathbf{G}, \quad \mathbf{H} = -H(T, \mathbf{F}) \mathbf{G}. \quad (20)$$

Es folgt

$$H = \Lambda^\varepsilon K, \quad \text{sym}_{13} \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{F}} - \Lambda^\varepsilon \frac{\partial K}{\partial \mathbf{F}} \right) \mathbf{G} \Rightarrow \Lambda^\varepsilon = \Lambda^\varepsilon(T). \quad (21)$$

Mit Hilfe der Annahme über die Existenz der idealen Wände bekommen wir

$$\Lambda^\varepsilon = \frac{1}{T}. \quad (22)$$

Damit

$$H = \frac{K}{T} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{T} \mathbf{Q}. \quad (23)$$

Diese Beziehung gilt nicht immer, aber für die klassische Thermomechanik kann sie bewiesen werden.

Es ist günstig, die folgende Funktion einzuführen

$$\psi = \varepsilon - T\eta. \quad (24)$$

Damit haben die Beziehungen (17) die Gestalt

$$\eta = -\frac{\partial\psi}{\partial T}, \quad \varepsilon = \psi - T\frac{\partial\psi}{\partial T}, \quad \psi = \psi(T, \mathbf{F}), \quad \varepsilon = \varepsilon(T, \mathbf{F}), \quad \eta = \eta(T, \mathbf{F}), \quad (25)$$

$$\mathbf{P} = \rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{F}}. \quad (26)$$

Die Funktion ψ wird die *freie Helmholtzsche Energie* genannt. Wenn die konstitutive Beziehung für diese Funktion bekannt ist, können wir die konstitutiven Beziehungen für die innere Energie ε , die Entropie η und den Spannungstensor \mathbf{P} durch Differenzierung bestimmen. In diesem Sinn sagt man, dass ψ ein *thermodynamisches Potential* für die Variablen $\{T, \mathbf{F}\}$ ist.

Die thermodynamischen Beziehungen (25), (26) führen zu der folgenden Differenzialgleichung

$$d\eta = \frac{1}{T} \left(d\varepsilon - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{P} \cdot d\mathbf{F} \right). \quad (27)$$

Das ist die *Gibbssche Gleichung der Thermoelastizität*. Irrtümlich wird sie manchmal mit dem zweiten Hauptsatz identifiziert. Wir haben gesehen, dass außer den Identitäten (17), (18) auch die Ungleichung (18) bleibt, die man in der Form schreiben kann

$$\mathcal{D} = -\mathbf{G} \cdot \mathbf{Q} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad K \geq 0. \quad (28)$$

Die Funktion \mathcal{D} ist die *Dissipation*. Sie verschwindet im *thermodynamischen Gleichgewicht*. In unserem Fall bedeutet dies, dass der Temperaturgradient \mathbf{G} im Gleichgewicht gleich Null ist. Gleichzeitig bestimmt die Ungleichung (28) die *Stabilitätsbedingung des Gleichgewichts*, weil \mathcal{D} eine konvexe Funktion des Temperaturgradienten sein muss.

5 Inkonsistente thermoelastische Modelle mit dem zweiten Deformationsgradienten

Wir versuchen die oben dargestellte Klasse von Modellen um einen geometrischen Effekt zu ergänzen. Das Beispiel der von Timoshenko vorgeschlagener Erweiterung von Bernoullischer Balken-BiegungsTheorie zeigt, dass lokale Drehungen einen wesentlichen Einfluss auf das Verhalten des Systems haben and gewünschte Korrekturen (z.B. Biegungswellenausbreitung in Balken) hervorrufen.

Die einfachste Methode das thermoelastische Modell zu erweitern ist den zweiten Deformationsgradienten Grad \mathbf{F} als konstitutive Variable einzuführen

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{F}, \text{Grad } \mathbf{F}, T, \mathbf{G}), \quad \varepsilon = \varepsilon(\mathbf{F}, \text{Grad } \mathbf{F}, T, \mathbf{G}), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{F}, \text{Grad } \mathbf{F}, T, \mathbf{G}), \quad (29)$$

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \mathbf{f}, \quad \text{Grad } \mathbf{F} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial X_K \partial X_L} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L, \quad \mathbf{G} = \text{Grad } T.$$

Unglücklicherweise, diese Erweiterung ist thermodynamisch nicht zulässig. Anstatt der Ungleichung (15) haben wir jetzt

$$\begin{aligned}
& \rho_0 \left[\frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{G}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \text{Grad } \mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \text{Grad } \mathbf{F}}{\partial t} \right] + \\
& + \left[\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial T} \cdot \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{G}} \right)^T \cdot \text{Grad } \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\frac{12}{T}} \cdot \text{Grad } \mathbf{F} \right] - \\
& - \rho_0 \Lambda^\varepsilon \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{G}} \cdot \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} - \mathbf{P} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \text{Grad } \mathbf{F}} \cdot \frac{\partial \text{Grad } \mathbf{F}}{\partial t} \right] - \\
& - \Lambda^\varepsilon \left[\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial T} \cdot \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{G}} \right)^T \cdot \text{Grad } \mathbf{G} + \left(\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{F}} \right)^{\frac{12}{T}} \cdot \text{Grad } \mathbf{F} \right] \geq 0. \quad (30)
\end{aligned}$$

Die Linearität bezüglich $\partial \text{Grad } \mathbf{F} / \partial t$ führt zu der Identität

$$\frac{\partial \psi}{\text{Grad } \mathbf{F}} = 0, \quad \psi = \varepsilon - T\eta. \quad (31)$$

Dies bedeutet, dass die Abhängigkeit von $\text{Grad } \mathbf{F}$ unmöglich ist. Diese Schlussfolgerung ist damit verbunden, dass wir im Modell keine dynamische Größe eingeführt haben, die mit $\text{Grad } \mathbf{F}$ kanonisch gekoppelt wäre. Diese Größe – die *Momentenspannung* – würde einen Beitrag zu dem Energierhaltungssatz liefern, woraus die Abhängigkeit der freien Energie ψ von $\text{Grad } \mathbf{F}$ folgen würde.

Weiter wird diese Erweiterung für den linearen Fall vorgestellt.

6 Lineare Thermoelastizität mit Momentenspannungen

Die klassische Cosserat-Theorie bestrebt die folgenden Felder zu beschreiben

1. den Verschiebungsvektor $u_i(\mathbf{x}, t)$,
2. den Vektor des Drehungswinkels $\phi_i(\mathbf{x}, t)$,
3. die Temperatur $T(\mathbf{x}, t)$,

als Funktionen der aktuellen Plazierung \mathbf{x} und der Zeit t .

Diese Felder müssen die lokalen Erhaltungssätze des Impuls, Dralls und Energie erfüllen

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho b_i, & \mathbf{T} &= \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \\
J \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} &= \epsilon_{ijl} \sigma_{jl} + \frac{\partial \mu_{ji}}{\partial x_j} + \rho \nu_i, & \mathbf{M} &= \mu_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \\
\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} &= \sigma_{ij} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \mu_{ij} \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial t} + \rho r, & \gamma_{ij} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \epsilon_{ijk} \phi_k, & \kappa_{ij} &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j},
\end{aligned} \quad (32)$$

worin ρ die konstante Massendichte, J das Trägheitsmoment, σ_{ij} die Komponenten des Cauchy-Spannungstensors, μ_{ij} die Komponenten des Momentenspannungstensors bezeichnen. γ_{ij} ist ein nichtsymmetrischer Verzerrungstensor und κ_{ij} bezeichnet die Torsion. Die Theorie ist linear bezüglich diesen Größen, d.h.

$$\|\gamma_{ij}\| \ll 1, \quad \|\kappa_{ij}\| \ll 1, \quad (33)$$

wobei die Norms durch Eigenwerte definiert sind.

Die Cosserat-Theorie ist durch die folgenden konstitutiven Beziehungen abgeschlossen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \sigma_{ij} \left(\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), & \mu_{ij} &= \mu_{ij} \left(\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \\ \varepsilon &= \varepsilon \left(\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), & q_i &= q_i \left(\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (34)$$

Wir untersuchen die thermodynamische Zulässigkeit dieser Beziehungen.

Der zweite Hauptsatz enthält die Entropieungleichung

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial h_k}{\partial x_k} &\geq 0, \\ \eta &= \eta \left(\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), & h_i &= h_i \left(\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

die für alle Prozesse gelten muß. Diese Einschränkung wird mit Hilfe der Multiplikatoren eliminiert. Für alle Felder $\{\mathbf{u}, \phi, T\}$ gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial h_k}{\partial x_k} - \Lambda_i^v \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) - \Lambda_i^\phi \left(J \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} - \epsilon_{ijl} \sigma_{jl} - \frac{\partial \mu_{ji}}{\partial x_j} \right) - \\ - \Lambda^\varepsilon \left(\rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \sigma_{ij} \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} - \mu_{ij} \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial t} \right) \geq 0 \end{aligned} \quad (36)$$

worin die Multiplikatoren $\{\Lambda_i^v, \Lambda_i^\phi, \Lambda^\varepsilon\}$ Funktionen der konstitutiven Variablen $\{\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, T, \partial T/\partial x_k\}$ sind.

Offensichtlich ist die Ungleichung (36) linear bezüglich Beschleunigungen $\partial^2 u_i/\partial t^2$ und $\partial^2 \phi_i/\partial t^2$. Dies bedeutet, daß $\Lambda_i^v = 0$ und $\Lambda_i^\phi = 0$. Man kann beweisen, daß $\Lambda^\varepsilon = 1/T$. Folglich kann man die Ungleichung (36) in der Form schreiben

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \eta}{\partial \gamma_{kl}} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \kappa_{kl}} \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial (\partial T/\partial x_i)} \frac{\partial (\partial T/\partial x_i)}{\partial t} \right) + \\ + \left(\frac{\partial h_i}{\partial \gamma_{kl}} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_i}{\partial \kappa_{kl}} \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial h_k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial h_k}{\partial (\partial T/\partial x_i)} \frac{\partial (\partial T/\partial x_i)}{\partial x_k} \right) - \\ - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \gamma_{kl}} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \kappa_{kl}} \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial (\partial T/\partial x_i)} \frac{\partial (\partial T/\partial x_i)}{\partial t} \right) - \\ - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \gamma_{kl}} \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial \kappa_{kl}} \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial x_i} + \frac{\partial q_k}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial q_k}{\partial (\partial T/\partial x_i)} \frac{\partial (\partial T/\partial x_i)}{\partial x_k} \right) \geq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Diese Ungleichung ist linear bezüglich

$$\left\{ \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial t}, \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial t}, \frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial (\partial T / \partial x_i)}{\partial t}, \frac{\partial \gamma_{kl}}{\partial x_i}, \frac{\partial \kappa_{kl}}{\partial x_i}, \frac{\partial (\partial T / \partial x_i)}{\partial x_k} \right\}, \quad (38)$$

und nichtlinear bezüglich $\partial T / \partial x_i$. Wenn wir wieder die Helmholtssche freie Energie einführen

$$\psi = \varepsilon - T\eta, \quad \psi = \psi \left(\gamma_{kl}, \kappa_{kl}, T, \frac{\partial T}{\partial x_k} \right), \quad (39)$$

bekommen wir die folgenden Beziehungen

$$\eta = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \varepsilon = \psi - T \frac{\partial \psi}{\partial T}, \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \gamma_{ij}}, \quad \mu_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \kappa_{ij}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial (\partial T / \partial x_i)} = 0. \quad (40)$$

Es bleibt die Restungleichung, die die Dissipation definiert

$$\mathcal{D} = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_k} q_k \geq 0. \quad (41)$$

Für *isotrope homogene zentralsymmetrische Stoffe* ist die freie Energie folgendermaßen formuliert

$$\begin{aligned} \rho \psi = & \frac{\mu + \alpha}{2} \gamma_{kl} \gamma_{kl} + \frac{\mu - \alpha}{2} \gamma_{kl} \gamma_{lk} + \frac{\lambda}{2} \gamma_{kk} \gamma_{ll} + \frac{\gamma + \varepsilon}{2} \kappa_{kl} \kappa_{kl} + \frac{\gamma - \varepsilon}{2} \kappa_{kl} \kappa_{lk} + \\ & + \frac{\beta}{2} \kappa_{kk} \kappa_{ll} - \nu \gamma_{kk} (T - T_0) + \rho \psi_0 (T), \end{aligned} \quad (42)$$

worin λ, μ Lamé-Konstanten, $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ Cosserat-Konstanten, ν Wärmeausdehnungskonstante und T_0 die Referenztemperatur bezeichnen. Die Invarianten $\gamma_{kl} \kappa_{kl}$ erscheinen nicht wegen der Annahme der Zentralsymmetrie. Diese freie Energie ergibt die folgenden Beziehungen für Spannungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij} + (\mu + \alpha) \gamma_{ij} + (\mu - \alpha) \gamma_{ji} - \nu (T - T_0) \delta_{ij}, \\ \mu_{ij} &= \beta \kappa_{kk} \delta_{ij} + (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ji}. \end{aligned} \quad (43)$$

Diese Beziehungen für den Fall der konstanten Temperatur führen zu folgenden Wellengleichungen

$$\begin{aligned} \square_2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + 2\alpha \operatorname{rot} \boldsymbol{\phi} &= 0, \\ \square_4 \boldsymbol{\phi} + (\beta + \gamma - \varepsilon) \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{\phi} + 2\alpha \operatorname{rot} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (44)$$

worin

$$\square_2 = (\mu + \alpha) \nabla^2 - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad \square_4 = (\gamma + \varepsilon) \nabla^2 - J \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (45)$$

Viele Ergebnisse kann man, zum Beispiel, in dem Buch von W. Nowacki finden.

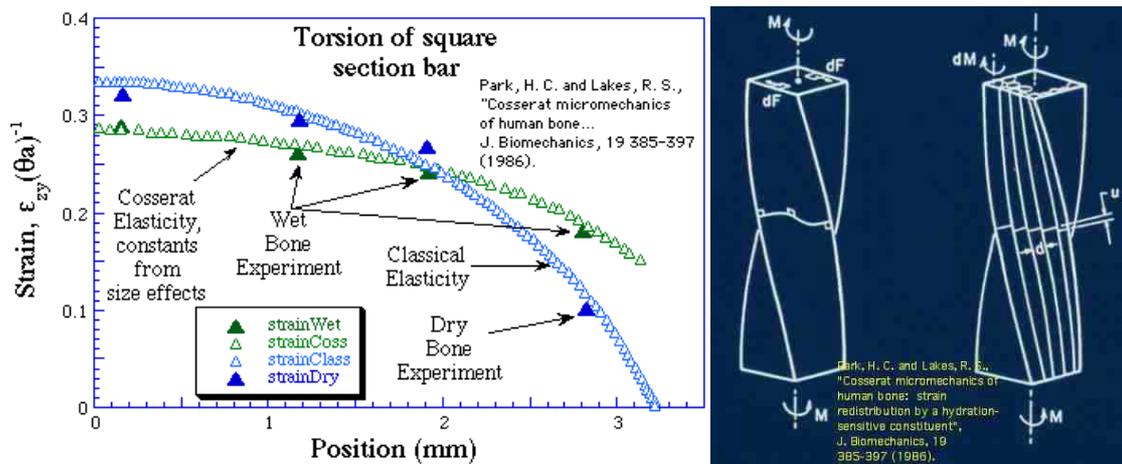


Bild 4: Biomechanische Anwendungen von Cosserat-Theorie

Literaturhinweise

1. A. C. ERINGEN; *Microcontinuum Field Theories I. Foundations and Solids*, Springer, New York, 1999.
2. A. C. ERINGEN; *Microcontinuum Field Theories: II. Fluent Media*, Springer, New York 2001.
3. M. B. RUBIN, *Cosserat Theories: Shells, Rods and Points*, Kluwer, Dordrecht, 2000.
4. W. NOWACKI; *Theory of Asymmetric Elasticity*, Pergamon, Oxford, 1986.
5. K. WILMANSKI; *Thermomechanics of Continua*, Springer, Heidelberg, 1998.
6. K. WILMANSKI; *Continuum Thermodynamics. Part I: Foundations*, WorldScientific, Singapore, 2008.