Dynamika budowli – notatki do wykładów

Krzysztof Wilmański
Instytut Budownictwa, Uniwersytet Zielonogórski
http://www.mech-wilmanski.de

April 26, 2009

Spis treści

1 Wprowadzenie

1.1 Motywacja

Reakcja konstrukcji na obciążenia dynamiczne ma wiele różnorodnych aspektów praktycznych. Wśród nich można wyróżnić następujące:

1. reakcja na obciążenia udarowe (wybuchy, kolizje z samolotami),
2. reakcja na obciążenia sejsmiczne,
3. rezonans i zmęczenie przy obciążeniach cyklicznych (np. fundamenty pod maszyny) i flatter (np. obciążenie wiatrem, Tacoma Narrow Bridge),
4. osłabienie izolacji akustycznej na skutek rezonansu z falą dźwiękową.

Znaczną część tych zjawisk można opisać analizując częstotliwość drgań własnych i tłumienie konstrukcji przy pomocy modeli liniowych. Niektóre problemy, jak flatter lub sprzężenie modów drgań (np. giętnych i skrętnych) wymagają modeli nieliniowych.

Szczególnie istotna w zagadnieniach liniowych jest analiza *drgań własnych.* Aby wyjaśnić cel takiej analizy wystarczy rozpatrzyć drgania punktowej masy m zawieszonej na nieważkiej sprężynie o stałej sprężystości k. Jeśli początek układu współrzędnych przyjmiemy w punkcie położenia równowagi tej masy, a następnie wychylimy masę z tego położenia, to swobodne drgania masy opisuje równanie Newtona

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{1}$$

Poszukujemy rozwiązania tego równania w postaci *harmonicznej*

$$x = x_0 + A\sin\omega t, \tag{2}$$

gdzie x_0 jest wychyleniem początkowym, a A – *amplitudą drgań.* Podstawienie do równania (1) daje warunek istnienia rozwiązań o postaci (2)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3}$$

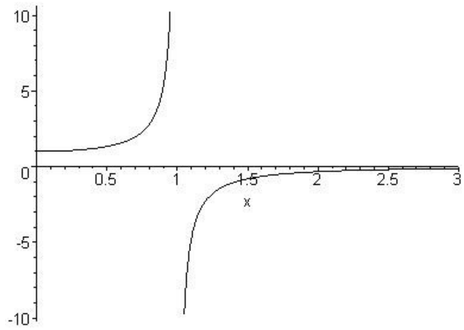
Ta wartość częstotliwości ω jest nazywana wartością *własną.* Rozpatrzmy teraz drgania tej masy wymuszone przez siłę okresową $P = P_0 \sin pt$. Równanie (1) musimy zasąpić następującym

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + P_0 \sin pt. \tag{4}$$

Rozwiązanie szczególne tego równania różniczkowego jest następujące

$$x = \frac{P_0}{k - mp^2} \sin pt = \frac{P_0}{m\omega^2} f\left(\frac{p}{\omega}\right), \quad f\left(\frac{p}{\omega}\right) := \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}}. \tag{5}$$

Funkcja f jest przedstawiona na Rys. 01.



Rys. 01: *Amplituda drgań wymuszonych sprężyny:* $x = p/\omega$.

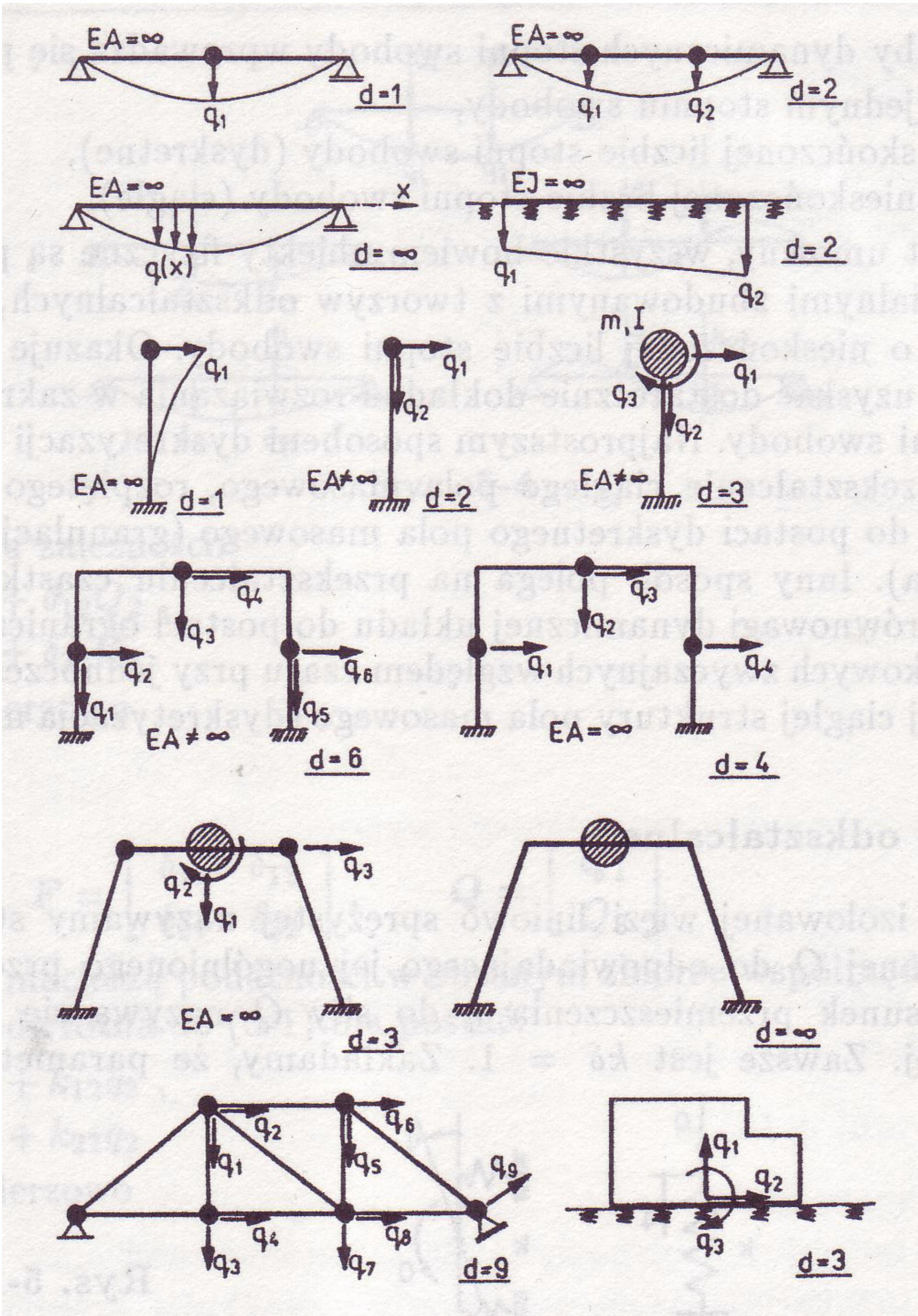
Jest oczywiste, że wartość amplitudy drgań wzrasta w sposób nieograniczony, gdy wartość częstotliwości zbliża się do wartości własnej. Ten efekt nazywamy *rezonansem.*

Zwykle obciążenia dynamiczne nie mają prostej postaci harmonicznej, występującej w powyższym przykładzie. W wielu problemach praktycznych daje się je jednak przedstawić w postaci superpozycji wielu, czasem nieskończenie wielu, funkcji harmonicznych. Obciążenie jest wtedy charakteryzowane zbiorem wielu częstotliwości. Ten zbiór nazywamy *widmem.* Jeśli częstotliwość własna należy do tego zbioru to musi się pojawić zjawisko rezonansu.

Celem tych wykładów jest analiza tych problemów zarówno dla układów o skończonej, jak i o nieskończonej (tzw. układów ciągłych) ilości stopni swobody.

1.2 Dynamiczne stopnie swobody, więzy odkształcalne

Stan przemieszczenia elementów konstrukcji opisujemy w dynamice, podobnie jak w zagadnieniach statycznych, przy pomocy zbioru pewnych współrzędnych uogólnionych. Liczba niezależnych współrzędnych uogólnionych, niezbędnych do określenia chwilowej konfiguracji konstrukcji nazywa się *liczbą dynamicznych stopni swobody d.* Jak wiadomo z mechaniki ogólnej, punkt materialny ma w przestrzeni trzy stopnie swobody, na płaszczyźnie – dwa stopnie swobody, tarcza sztywna w ruchu płaskim ma trzy stopnie swobody, bryła sztywna w przestrzeni ma sześć stopni swobody, itd. Te elementy, wchodzące w skład modelu ustroju budowlanego są powiązane z ostoją (podpory), a między sobą – więziami. Te ostatnie mogą być odkształcalne i wtedy nie zmieniają liczby dynamicznych stopni swobody, lub też nieodkształcalne, przez co nakładają na układ więzy kinematyczne. Liczba dynamicznych stopni swobody układu złożonego jest równa sumie lokalnych stopni swobody pomniejszonej o liczbę ograniczeń, wynikających z więzów.



Rys. 1: *Przykłady dynamicznych stopni swobody*

Ta liczba może być zmodyfikowana na skutek dodatkowych założeń upraszczających, które prowadzą do dodatkowych więzów. Na przykład, założenie, że pręty posiadają jedynie odkształcalność giętną, ale są nierozciągliwe, wprowadza więzi o przegubowych końcach. Uproszczenie, że skoncentrowana masa nie posiada bezwładności obrotowej prowadzi na płaszczyźnie do dwóch punktów swobody (punkt materialny), a nie trzech. Przykłady określania stopni swobody są pokazane na Rys. 1.

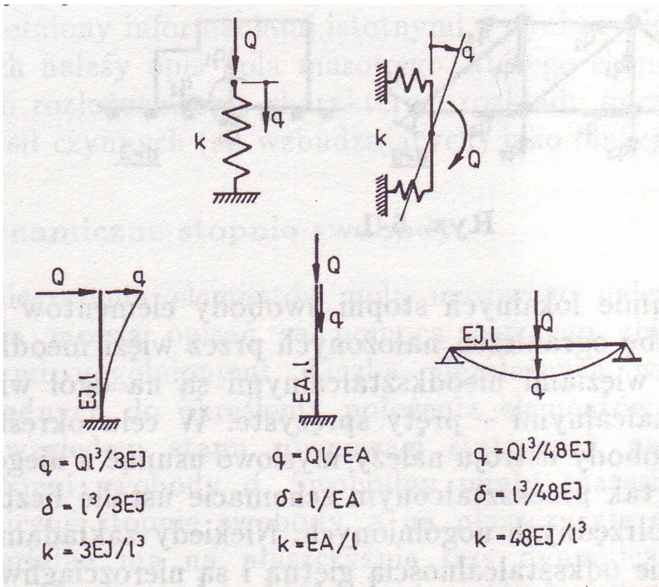
Układy dynamiczne dzieli się umownie na dwie klasy

– o skończonej liczbie stopni swobody (układy dyskretne),

– o nieskończonej liczbie stopni swobody (układy ciągłe).

Jest oczywiste, że w ramach opisu makroskopowego wszystkie układy powinny należeć do drugiej klasy. Jednakże w wielu praktycznie ważnych przypadkach przybliżenie układami, należącymi do pierwszej klasy jest wystarczające. Przekształcenie dynamicznego układu ciągłego do układu dyskretnego można otrzymać przez dyskretyzację ciągłego pola masowego przy pomocy granulacji mas – dyskretyzacja fizyczna, albo zamiany równań różniczkowych cząstkowych przez równania różniczkowe zwyczajne względem czasu – dyskretyzacja matematyczna.

Jak już wspominaliśmy, więzi odkształcalne, na przykład pręty sprężyste, nie zmieniają dynamicznej liczby stopni swobody. Do ich opisu wprowadza się pojęcie sztywności. *Sztywnością* k izolowanej więzi liniowo sprężystej nazywa się stosunek uogólnionej siły czynnej Q do odpowiadającego jej uogólnionego przemieszczenia q (patrz Rys. 2). Odwrotność sztywności $\delta = 1/k$ nazywa się *podatnością*. Zakładamy, że więzi sprężyste są *skleronomiczne* (tzn. niezależne od czasu).



Rys. 2: *Sztywność i podatność więzi sprężystych*

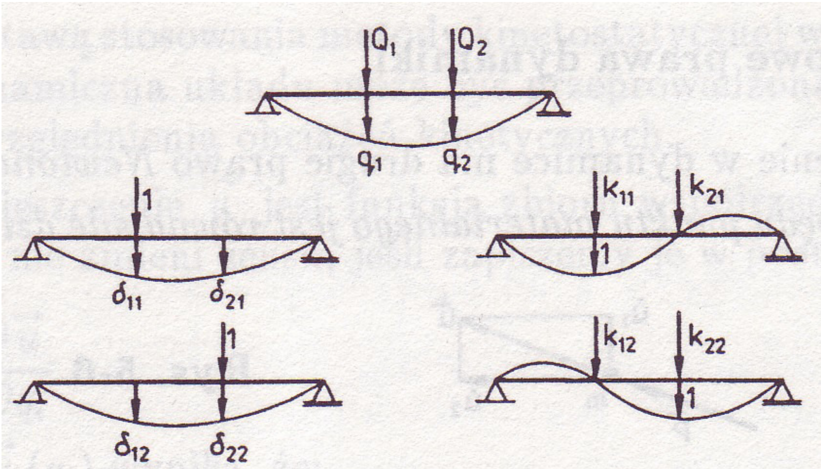
Dla układów o skończonej liczbie stopni swobody własności sprężyste opisują macierze **podatności i sztywności**. Ich konstrukcję pokazujemy na przykładzie belki swobodnie podpartej (Rys. 3).

W przedstwaionym przykładzie mamy zależności

$$\begin{aligned} q_1 &= \delta_{11}Q_1 + \delta_{12}Q_2, \\ q_2 &= \delta_{21}Q_1 + \delta_{22}Q_2, \end{aligned} \tag{6}$$

lub w postaci macierzowej

$$\mathbf{q} = \mathbf{FQ}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$



Rys. 3: *Belka opisana dwuelemntowym zbiorem wspłrzędnych uogólnionych*

Macierz **F** jest nazywana **macierzą podatności**. Relacja odwrotna

$$\begin{aligned} Q_1 &= k_{11}q_1 + k_{12}q_2, \\ Q_2 &= k_{21}q_1 + k_{22}q_2, \end{aligned} \tag{8}$$

definiuje **macierz sztywności K**

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{q}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{KF} = \mathbf{FK} = \mathbf{1}. \tag{9}$$

1.3 Podstawy mechaniki Lagrange'a

Przedmiotem opisu w mechanice Lagrange'a jest układ N punktów, których stan w danej chwili czasu jest opisywany przez współrzędne uogólnione $\{q_1, \ldots, q_{3N}\}$ i prędkości uogólnione $\{\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3N}\}$. Własności takiego układu opisuje *funkcja Lagrange'a* $L(q_1, \ldots, q_{3N}, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_{3N})$. Zakłada się, że w układzie *odosobnionym* (tzn. w układzie nie oddziaływującym ze światem zewnętrznym) *funkcjonał działania*

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \tag{10}$$

osiąga *ekstremum.* W powyższej całce chwile początkowa t_1 i końcowa t_2 są tak wybrane, że znane jest położenie wszystkich punktów w tych chwilach tzn. $\{q_1(t_1), \ldots, q_{3N}(t_1)\}$, $\{q_1(t_2), \ldots, q_{3N}(t_2)\}$ są znane.

Warunki konieczne ekstremum wynikają z pierwszej wariacji tego funkcjonału

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta \dot{q}_\alpha \right) dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sum_{\alpha=1}^{3N} \left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right) \delta q_\alpha dt - \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha \right|_{t_1}^{t_2} = 0, \end{aligned} \tag{11}$$

dla wszystkich dopuszczalnych wariacji δq_α. Wariacje te, aby były dopuszczalne, muszą być małe, niezależne i muszą znikać w chwilach t_1 i t_2. Stąd wynika

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_\alpha}=0, \quad \alpha=1,\ldots,3N. \tag{12}$$

Są to *równania Lagrange'a – Eulera* układu odosobnionego.

Można łatwo pokazać, że funkcja Lagrange'a układu punktów materialnych, opisywanych w kartezjańskim układzie odniesienia, ma następującą budowę (patrz, na przykład, podręcznik Landaua i Lifszica)

$$L=\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i v_i^2}{2}-U\left(\mathbf{r}_1\left(t\right),\ldots,\mathbf{r}_N\left(t\right)\right), \quad , v_i^2:=\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i, \quad i=1,\ldots,N, \tag{13}$$

gdzie m_i jest masą cząsteczki i, $\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_i\left(t\right)=\dot{\mathbf{r}}_i\left(t\right)$ określa wektor prędkości cząsteczki i, a $\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i\left(t\right)$ jest wektorem położenia cząsteczki i. Pierwszy człon określa *energię kinetyczną* E_k, a drugi – *energię potencjalną* $U\equiv E_p$ układu. Jak widać, w takim układzie odniesienia zależność funkcji Lagrange'a od położenia cząsteczek $\mathbf{r}_i$ i od prędkości ulega rozdzieleniu na dwa addytywne człony E_k i U. Równania (12) można wtedy napisać w następującej postaci

$$m_i\dot{\mathbf{v}}_i=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad i=1,\ldots,N. \tag{14}$$

Jest to, oczywiście, drugie prawo Newtona dla odosobnionego układu N cząstek. Wektor

$$\mathbf{P}_i=-\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} \tag{15}$$

określa całkowitą siłę, z jaką $N-1$ cząsteczek układu oddziaływuje na cząsteczkę i. W przypadku oddziaływań ze światem zewnętrznym do tej siły należy dodać siłę zewnętrzną $\mathbf{P}_i^{ext}\left(\mathbf{r}_i,t\right)$.

O funkcji Lagrange'a robi się założenie, że jest ona *niezmiennicza* względem translacji czasu $t\to t+\delta t$, oraz translacji i obrotu przestrzeni, tzn. $\mathbf{r}\to\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}$, dla translacji i $\mathbf{r}\to\mathbf{r}+\delta\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{r}$ dla obrotu. Wariacje $\delta t,\delta\mathbf{r},\delta\boldsymbol{\varphi}$ są stałe, infinitezymalne i dowolne. Ten warunek, wynikający z założenia o jednorodności czasu, oraz o jednorodności i izotropii przestrzeni ruchu, prowadzi do *zasad zachowania*, odpowiednio, *energii, pędu i krętu*. Dla układów odosobnionych mają one postać

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}\mathbf{v}_i-L\right)=0, \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}=0, \quad \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i}=0. \tag{16}$$

Tym samym dla funkcji Lagrange'a (13) mamy

$$\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}m_i v_i^2+U\left(\mathbf{r}_i\right)\right]=E=const., \quad \sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}_i=0, \quad \sum_{i=1}^{N}\mathbf{r}_i\times\mathbf{P}_i=0. \tag{17}$$

W powyższych związkach E oznacza całkowitą energię układu odosobnionego (izolowanego). Dwa pozostałe warunki są, oczywiście, *warunkami równowagi* sił i momentu sił układu odosobnionego. Związki te nie są spełnione, gdy działają siły zewnętrzne. Ich prawa strona musi być odpowiednio zmodyfikowana.

W zatosowaniach do dynamiki konstrukcji stosuje się zwykle współrzędne uogólnione, występujące w równaniach Lagrange'a – Eulera. Można je wprowadzić przez transformację

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i\left(q_1, \ldots, q_{3N}\right), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{18}$$

Transformacja ta jest w powyższej postaci odwracalna. Ogólnie wymaga się, aby całkowita liczba n tych współrzędnych nie była mniejsza od ilości stopni swobody $d = 3N$. Oznacza to, że macierz

$$\left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right], \quad i = 1, \ldots, N, \quad \alpha = 1, \ldots, n, \tag{19}$$

jest dodatnio określona dla $n = d$, a dla $n > d$

$$\operatorname{rank}\left[\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\right] = d. \tag{20}$$

Zamiana zmiennych prowadzi do następującej transformacji funkcji Lagrange'a

$$\begin{aligned} L &= E_k - U, \\ E_k &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{\alpha=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha\right) \cdot \sum_{\beta=1}^{n}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}\right)\dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta = \\ &= \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{B} := \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta}\right], \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie *macierz bezwładności* $\mathbf{B}$ ma własności

$$\begin{aligned} \det \mathbf{B} &> 0 \quad \text{dla} \quad n = d = 3N, \\ \det \mathbf{B} &= 0 \quad \text{dla} \quad n > d, \end{aligned} \tag{22}$$

i $\mathbf{B}$ jest nieujemnie określona w drugim przypadku. Macierz bezwładności $\mathbf{B}$ jest w ogólnym przypadku funkcją współrzędnych uogólnionych q_α, a to oznacza, że funkcja Lagrange'a nie rozbija się addytywnie na człony zależne tylko od prędkości $\mathbf{q} = [\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n]^T$ i tylko od położeń $\mathbf{q} = [q_1, \ldots, q_n]^T$.

Dla układów *liniowych* ($\mathbf{q}$ określa małe odchylenie od zerowego stanu początkowego) energia potencjalna U ma również postać kwadratową. We współrzędnych uogólnionych ma ona postać

$$U = E_p = \frac{1}{2}\mathbf{q}^T \cdot \mathbf{K}\mathbf{q}, \tag{23}$$

gdzie $\mathbf{K}$ jest *macierzą sztywności*. Do jej konstrukcji przy pomocy sztywności k, charakterystycznych dla każdego stopnia swobody i odpowiedniej macierzy transformacji $\mathbf{A} = [\partial \mathbf{r}_i / \partial q_\alpha]$ powrócimy później.

Przy dyskretnym modelowaniu układów ciągłych, takich jak układy belkowe, pojawiają się również siły *dysypatywne*, związane z lepkością materiału lub też dysypacją zewnętrzną (tarcie o podłoże, rozpraszanie fal w gruntach itp.). W modelowaniu liniowym zakłada się zwykle, że mają one potencjał, tzn. odpowiednia siła $\mathbf{P}_v$ jest określona związkiem

$$\mathbf{P}_v = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad \Phi = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \cdot \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}, \tag{24}$$

gdzie Φ jest *funkcją tłumienia (fukcja dysypacji Rayleigha)*, $\mathbf{C}$ – *macierzą tłumienia.*

Zakładając, że siły zewnętrzne $\mathbf{P}_{ext}$ posiadają *pseudopotencjał* Ψ (praca wirtualna sił zewnętrznych)

$$\Psi = \mathbf{P}_{ext} \cdot \mathbf{q}, \tag{25}$$

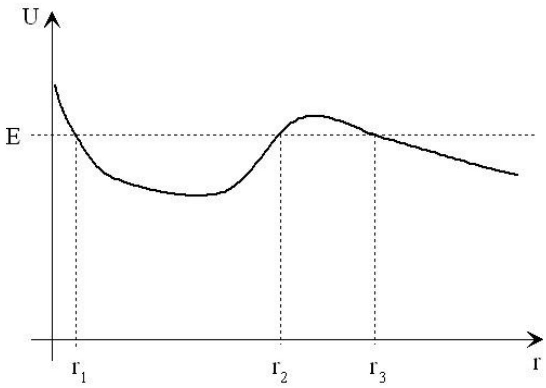
możemy uogólnić zlinearyzowane równania Lagrange'a-Eulera do następującej postaci

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{q}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}_{ext}, \tag{26}$$

Do konstrukcji tych równań będziemy wielokrotnie powracać w dalszym ciągu tych notatek. Zauważmy jedynie, że macierze bezwładności $\mathbf{B}$, tłumienia $\mathbf{C}$ i sztywności $\mathbf{K}$ są dla układów liniowych stałe i niezależne od dynamiki i deformacji układu.

1.4 Przykład układu nieliniowego – wahadło

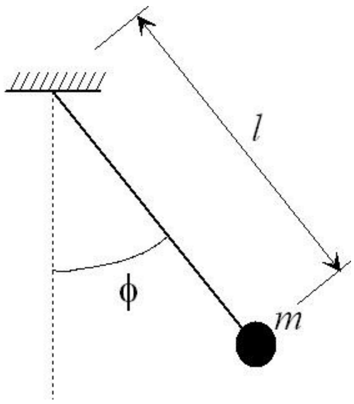
Rozpatrzmy prosty przykład zastosowania zasady zachowania energii do analizy ruchu układu odosobnionego. Przede wszystkim, jest oczywiste, że energia potencjalna U nie może być większa od energii całkowitej w takim układzie. Przedstawiono to schematycznie na Rys. 4 dla przypadku układu, którego konfigurację opisuje jedna zmienna r.



Rys. 4: *Energia potencjalna układu odosobnionego o jednym stopniu swobody (schematycznie).*

Układ ten może się znajdować jedynie w stanach r z przedziału $[r_1, r_2]$ lub też $r \geq r_3$. Wyjście układu poza te przedziały jest możliwe tylko wtedy, gdy naruszymy jego izolację. Oznacza to, praktycznie, że ruchy *okresowe*, jeśli wogóle istnieją, muszą być dla tego układu ograniczone do przedziału $[r_1, r_2]$. Punkty końcowe takich ruchów, r_1 i r_2, są punktami, w których $U = E$, energia kinetyczna jest zero, a prędkość jednowymiarowa przechodzi przez zero, tzn. zmienia kierunek.

Rozważmy praktycznie ważne rozwiązanie takiego problemu dla wahadła matematycznego. Oznaczenia są przedstawione na Rys. 5.



Rys. 5: *Wahadło matematyczne*

Jeśli przez ϕ_0 oznaczymy kąt maksymalnego wychylenia wahadła, to zasada zachowania energii przyjmuje postać

$$\frac{1}{2}m\left(l\dot{\phi}\right)^2 + mgl\left(1-\cos\phi\right) = mgl\left(1-\cos\phi_0\right), \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}, \tag{27}$$

lub po uproszczeniu

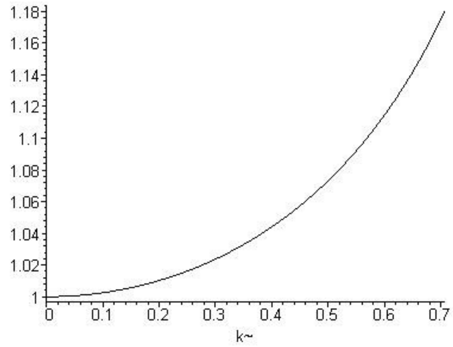
$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\frac{d\phi}{\sqrt{\cos\phi - \cos\phi_0}}, \tag{28}$$

gdzie g oznacza przyspieszenie ziemskie. Powyższy związek zawiera słynny rezultat Galileusza, że ruch masy w polu grawitacyjnym ziemi nie zależy od wielkości tej masy. Wniosek ten otrzymał Galileusz przy pomocy eksperymentu myślowego, który po 2000 lat obalił podstawy fizyki Arystotelesa.

Przy całkowaniu związku (28) korzystne jest przedstawienie funkcji trygonometrycznych przy pomocy kątów połówkowych. Dla *okresu* drgań T, tzn. dla czasu potrzebnego do wykonania jednego pełnego wahnięcia otrzymujemy wtedy

$$\begin{aligned} T &= \frac{2}{\sin\frac{\phi_0}{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\phi_0}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\left(\sin\frac{\phi}{2}/\sin\frac{\phi_0}{2}\right)^2}} = \\ &= 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-k^2y^2}\sqrt{1-y^2}} = 2\pi\chi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad k := \sin\frac{\phi_0}{2}. \end{aligned} \tag{29}$$

Ta całka definiuje funkcję specjalną, nazywaną *całką eliptyczną pierwszego rodzaju*, która jest stabelaryzowana. Współczynnik χ, określony tą całką, jest przedstawiony na Rys. 5.



Rys. 5: *Odchylenie od jedności (współczynnik χ) we wzorze na okres wahadła*

W przypadku małych wychyleń $|\phi_0| \ll 1$ można całkę eliptyczną łatwo obliczyć $((1-k^2y^2)(1-y^2) \approx (1-y^2))$

$$T \approx 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{30}$$

tzn. $\chi = 1$. Ten wynik jest znany z elementarnych rozważań fizycznych.

Zwróćmy jeszcze uwagę na fakt, że okres drgań jest odwrotnością częstości kołowej drgań $\omega = 2\pi/T$. Ten fakt był prawdopodobnie wykorzystywany do niezwykle dokładnego określenia jednostki długości już w czasach poprzedzających wprowadzenie przez człowieka pisma, a więc 6-7 tysięcy lat temu! Słynne konstrukcje Stonehenge służyły prawdopodobnie do pomiaru czasu w oparciu o ruch planety Wenus, a ten z kolei określał jednostkę długości – jard megalityczny – przy pomocy długości wahadła.

1.5 Dynamika bryły sztywnej

Na zakończenie uwag wstępnych przypomnimy krótko podstawowe pojęcia dynamiki bryły sztywnej. *Bryłą sztywną* nazywamy układ punktów, których odległości w czasie ruchu nie ulegają zmianie, tzn. dla dwóch dowolnie wybranych punktów $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| = const.$ Jeśli przez ρ oznaczymy *gęstość masy* bryły, to położenie *środka masy* $\mathbf{r}_0$ jest określone związkiem

$$M\mathbf{r}_0 = \int_V \rho\mathbf{r}dV, \quad M = \int_V \rho dV, \tag{31}$$

gdzie całkowanie jest rozciągnięte na całą bryłę V. Ruch punktów bryły sztywnej $\mathbf{r}(t)$ można opisać jako superpozycję ruchu postępowego środka masy $\mathbf{r}_0(t)$, który spełnia równania Newtona

$$M\ddot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{P}, \tag{32}$$

gdzie $\mathbf{P}$ jest całkowitą siłą zewnętrzną, działającą na bryłę, oraz tak zwanego *ruchu kulistego* wokół osi chwilowego obrotu, przechodzącej przez środek masy. Z uwagi na warunek sztywności bryły, który można napisać w postaci

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = const \quad \Longrightarrow \quad (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_0, \tag{33}$$

tzn. $\mathbf{v}$ jest prędkością ruchu względnego względem środka masy. Prędkość $\mathbf{v}$ można napisać w postaci

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \tag{34}$$

gdzie *wektor prędkości kątowej* $\boldsymbol{\omega}$ jest taki sam dla wszystkich punktów bryły i określa chwilową prędkość kątową w płaszczyźnie prostopadłej do osi chwilowego obrotu o kierunku określonym przez $\boldsymbol{\omega}$. W kartezjańskim układzie współrzędnych, którego początek leży w środku masy i który porusza się z bryłą mamy

$$v_k = \varepsilon_{klm}\omega_l x_m, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = x_i \mathbf{e}_i, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega_i \mathbf{e}_i, \tag{35}$$

gdzie ε_{klm} jest symbolem permutacyjnym. Współrzędne x_i, w przeciwieństwie do wektorów bazy $\mathbf{e}_i$, nie zmieniają się w czasie.

Dowód związku (34) jest oparty na obserwacji, że kinematyka bryły sztywnej wynika całkowicie z kinematyki trzech dowolnie wybranych punktów, nie leżących na jednej linii prostej. Ponieważ ich odległości nie ulegają zmianie mamy

$$\begin{aligned}
|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| &= const \implies (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\cdot(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = 0 \implies \\
&\implies (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \\
\\
|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3| &= const \implies (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)\cdot(\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_3) = 0 \implies \\
&\implies (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_3) = \boldsymbol{\omega}_{13} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3), \\
\\
|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3| &= const \implies (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)\cdot(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_3) = 0 \implies \\
&\implies (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_3) = \boldsymbol{\omega}_{23} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3).
\end{aligned}$$

Eliminacja prędkości z tych trzech związków prowadzi do zależności

$$\boldsymbol{\omega}_{13} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) - \boldsymbol{\omega}_{12} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\omega}_{23} \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3),$$

lub po przekształceniu

$$(\boldsymbol{\omega}_{13} - \boldsymbol{\omega}_{12}) \times \mathbf{r}_1 + (\boldsymbol{\omega}_{12} - \boldsymbol{\omega}_{23}) \times \mathbf{r}_2 + (\boldsymbol{\omega}_{23} - \boldsymbol{\omega}_{13}) \times \mathbf{r}_3 = \mathbf{0}. \tag{36}$$

Ten związek zachodzi dla dowolnego wyboru $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ tylko wtedy, gdy

$$\boldsymbol{\omega}_{12} = \boldsymbol{\omega}_{13} = \boldsymbol{\omega}_{23} =: \boldsymbol{\omega}, \tag{37}$$

gdzie wektor $\boldsymbol{\omega}$ jest niezależny od wyboru punktu. Wynikiem jest wzór (34).

Pęd $\mathbf{p}$ i *kręt* $\mathbf{k}$ bryły sztywnej są określone wzorami

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \int_V \rho \dot{\mathbf{r}} dV = M\dot{\mathbf{r}}_0, \qquad (38) \\
\mathbf{k} &= \int_V \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dV = \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p} + \int_V \rho\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]\, dV,
\end{aligned}$$

gdzie wykorzystano fakt redukcji względem środka masy. Ostatnią całkę można przekształcić następująco

$$\begin{aligned}
&\int_V \rho\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]\, dV = \\
&= \int_V \rho\,[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]\, dV = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega},
\end{aligned}$$

$$\mathbf{J} := \int_V \rho \left[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,\mathbf{1} - (\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\otimes(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \right] dV, \tag{39}$$

gdzie $\mathbf{J}$ jest *tensorem momentów bezwładności* bryły sztywnej. W układzie współrzędnych kartezjańskich poruszającym się z bryłą ("zamrożonym" w bryle) mamy

$$\mathbf{J} = J_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad J_{ij} = \int_V \rho \left(x_m x_m \delta_{ij} - x_i x_j \right) dV, \tag{40}$$

gdzie $\mathbf{e}_i(t)$ są ruchomymi wektorami jednostkowymi bazy. Ich zależność od czasu wynika łatwo z zależności

$$(x_i \mathbf{e}_i)^{\cdot} = \varepsilon_{ijl}\omega_j x_k \mathbf{e}_i \quad \Longrightarrow \quad \dot{\mathbf{e}}_i = \varepsilon_{ijk}\omega_j \mathbf{e}_k. \tag{41}$$

Równania ruchu bryły sztywnej wynikają teraz łatwo z zasad zachowania pędu i krętu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &\equiv M\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{P}, \\ \dot{\mathbf{k}} &= (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega})^{\cdot} = \mathbf{M}, \end{aligned} \tag{42}$$

gdzie $\mathbf{M}$ oznacza całkowity moment sił zewnętrznych względem środka masy. Wykorzystanie związku (41) w (42) prowadzi do *równań Eulera ruchu kulistego*

$$J_{ij}\dot{\omega}_j + \varepsilon_{ijk} J_{jm}\omega_k\omega_m = M_i. \tag{43}$$

Sprawdźmy jeszcze, jaką energię posiada bryła sztywna. Ponieważ energia potencjalna zależy wyłącznie od odległości punktów bryły, a te nie ulegają zmianie, więc U musi być stałe. Bez utraty ogólności można przyjąć $U = 0$. Pozostaje tylko energia kinetyczna

$$\begin{aligned} E_k &= \int_V \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}}dV = \\ &= \int_V \frac{1}{2}\rho\left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right)\cdot\left(\dot{\mathbf{r}}_0 + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right) dV = \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_0\cdot\dot{\mathbf{r}}_0 + \int_V \frac{1}{2}\rho\left(\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right)\cdot\left(\boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\right) dV = \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_0\cdot\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \tag{44}$$

Pierwszy człon opisuje, oczywiście, energię kinetyczną ruchu postępowego, a drugi – ruchu kulistego.

W dalszym ciągu stosować będziemy te związki głównie w uproszczonych przypadkach dwuwymiarowych. Dla takiego ruchu bryły sztywnej (tarczy!) mamy wtedy w układzie współrzędnych kartezjańskich

$$\mathbf{r}_0 = x_0(t)\,\mathbf{e}_1 + y_0(t)\,\mathbf{e}_2 + z_0\mathbf{e}_3, \quad \boldsymbol{\omega} = \omega(t)\,\mathbf{e}_3, \tag{45}$$

gdzie (x_0, y_0) są współrzędnymi środka masy bryły sztywnej, poruszającego się po płaszczyźnie $z_0 = const$ prostopadłej do wersora $\mathbf{e}_3$, a $\omega = \dot{\varphi}$ (φ – kąt obrotu) jest prędkością kątową ruchu obrotowego bryły wokół osi prostopadłej do tej płaszczyzny. Równania ruchu, z których wynika postać trzech funkcji opisujących ruch są następujące

$$M\ddot{x}_0 = P_x, \quad M\ddot{y}_0 = P_y, \quad I\dot{\omega} = M_z, \quad J = \int_V \rho\left(x^2 + y^2\right) dV, \tag{46}$$

gdzie początek układu współrzędnych (x, y), występujących w definicji *biegunowego momentu bezwładności* J, jest wybrany w środku masy bryły. P_x, P_y są współrzędnymi siły wypadkowej, a M_z jest momentem wypadkowym. Energia kinetyczna, a więc i funkcja Lagrange'a, jest w tym przypadku dana wzorem

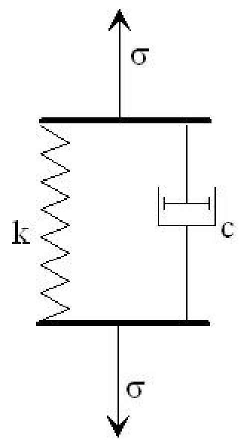
$$E_k = L = \frac{1}{2}\left(M\dot{x}_0^2 + M\dot{y}_0^2 + J\dot{\varphi}^2\right). \tag{47}$$

2 Układ o jednym stopniu swobody

2.1 Modele tłumienia

Tłumienie drgań układów mechanicznych wynika, jak już wspominaliśmy, z dwóch różnych powodów. Pierwszy z nich jest związany z własnościami materiałów, z których jest wykonana konstrukcja. Materiały te mogą posiadać, obok sprężystych, istotne własności lepkie, a te prowadzą, jak zobaczymy, do tłumienia drgań. Drugi powód może być zewnętrzny. Może to być kontakt, również celowy, z urządzeniem tłumiącym drgania, ale może to być również naturalny kontakt ze środowiskiem (powietrzem, gruntem, itp.), które przejmuje nieodwracalnie część energii z konstukcji i tym samym powoduje tłumienie drgań.

Rozważania dotyczące tłumienia rozpoczniemy od analizy prostego modelu reologicznego, *modelu Voigta*, składającego się z równolegle połączonych sprężyny i tłoczka (patrz Rys. 6).



Rys. 6: *Model Voigta*

W modelu tym naprężenie w sprężynie jest proporcjonalne do odkształcenia ε i współczynnikiem proporcjonalności jest sztywność k, a w tłoczku naprężenie jest proporcjonalne do szybkości odkształcenia $\dot{\varepsilon} = d\varepsilon/dt$ ze współczynnikiem lepkości c. Ponieważ elementy są połączone równolegle, więc mają to samo odkształcenie, a naprężenie całkowite σ jest sumą naprężeń obu elementów. Mamy więc

$$\sigma = k\varepsilon + c\dot{\varepsilon}. \tag{48}$$

Związek ten można rozumieć dwojako. Z jednej strony może on być interpretowany jako jednowymiarowy związek materiałowy (konstytutywny) między odkształceniem i naprężeniem. Istnieją jego uogólnienia trójwymiarowe i materiały, które spełniają taki związek nazywają się *lepkosprężystymi.* Z drugiej strony można go traktować jako zależność między współrzędnymi uogólnionymi i odpowiednimi siłami w układzie dyskretnym. W takim znaczeniu będziemy stosowali ten związek w następnych częściach tych notatek. W tym punkcie omówimy kilka własności materiału przy pierwszej interpretacji.

Potraktujmy związek (48) jako równanie dla odkształceń ε przy zadanych naprężeniach $\sigma(t)$. Rozwiążemy to równanie metodą uzmienniania stałej. Załóżmy

$$\varepsilon = A(t)\, e^{rt}. \tag{49}$$

Podstawienie w (48) daje

$$r = -\frac{1}{\tau}, \quad \tau = \frac{c}{k}, \quad \dot{A} = \frac{1}{c}\sigma(t)\, e^{\frac{t}{\tau}}. \tag{50}$$

Współczynnik τ nazywa się *czasem opóźnienia.* Scałkowanie prowadzi do rozwiązania

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{1}{k}\int_0^t \sigma(t-\eta)\, e^{-\frac{\eta}{\tau}} d\eta, \tag{51}$$

gdzie ε_0 jest początkową deformacją materiału. Jak widać aktualny stan deformacji $\varepsilon(t)$ zależy nie tylko od aktualnego stanu naprężeń, jak to ma miejsce dla materiałów sprężystych, lecz od całej *historii* naprężeń w przedziale od 0 do t. Ten efekt nazywa się *pamięcią* materiału. Obecność funkcji wykładniczej pod całką powoduje, że materiał pamięta naprężenia w odległej przeszłości gorzej, niż te w blizkiej. Dlatego nazywa się go materiałem o *zanikającej pamięci.*

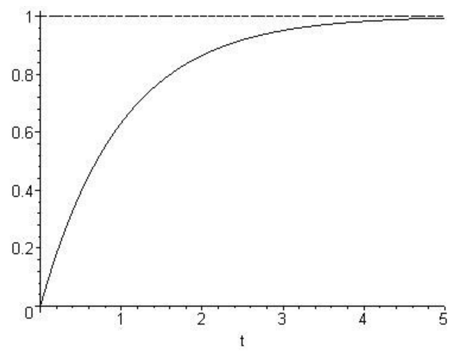
Rozpatrzmy przypadek szczególny stałego obciążenia σ_0. Wtedy, po obliczeniu całki we wzorze (51) otrzymujemy

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right). \tag{52}$$

Funkcję

$$\varphi(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}, \tag{53}$$

nazywa się *funkcją pełzania.* Dla modelu Voigta jest ona przedstawiona na Rys. 7.



Rys. 7: *Funkcja pełzania $k\varphi(t)$ dla modelu Voigta*

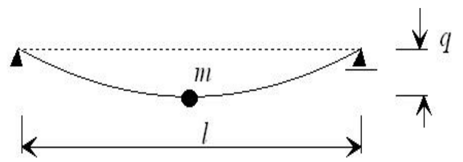
Fukcja ta odgrywa ważną rolę praktyczną, gdyż można ją mierzyć w prostych eksperymentach.

2.2 Drgania własne

Przechodzimy do badania równania opisującego drgania liniowego układu o jednym stopniu swobody. W przypadku wystąpienia tłumienia model Voigta opisany powyżej określa siłę *kinetyczną* działającą na układ jako $c\dot{q} + kq$. Równanie drgań swobodnych (bez działania siły zewnętrznej) jest wtedy opisane równaniem

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = 0. \tag{54}$$

Przykładowo ruch masy skupionej m (ugięcie belki w środku przęsła, q) umieszczonej w środku rozpiętości belki swobodnie podpartej (Rys. 8) jest opisywany równaniem, w którym $k = 48EI/l^3$. Współczynnik tłumienia musi być określony dodatkowo i do tego problemu powrócimy nieco później. Łatwo sprawdzić, że częstość drgań belki bez tłumienia wynosi $\omega_{dysk} = 6,9282\sqrt{EI/ml^3}$. Dla belki z ciągłym rozkładem masy otrzymuje się $\omega_{ciąg} = \pi^2\sqrt{EI/ml^3}$. Problem ten omawiamy w dalszej części kursu.



Rys. 8: *Drgania swobodne belki z masą skupioną*

Przystępujemy do rozwiązania równania (54). Jest to równanie liniowe o stałych współczynnikach. Szukamy więc rozwiązania o postaci $q \sim e^{rt}$. Podstawienie tej funkcji w (54) prowadzi do równania charakterystycznego

$$mr^2 + cr + k = 0. \tag{55}$$

Postać rozwiązań tego równania zależy od wartości wyróżnika Δ

$$\Delta = c^2 - 4km = -4km\left(1 - \alpha^2\right), \quad \alpha := \frac{c}{2\sqrt{km}}, \tag{56}$$

gdzie liczbę α nazywamy *liczbą tłumienia.*

1. Dla liczby tłumienia $\alpha > 1$ wyróżnik Δ jest dodatni i ogólne rozwiązanie problemu ma postać

$$q = A\exp\left(-\omega\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)t\right) + B\exp\left(-\omega\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 1}\right)t\right), \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{57}$$

gdzie A, B są dowolnymi liczbami rzeczywistymi nierównymi równocześnie zero. Ponieważ $\sqrt{\alpha^2 - 1} < \alpha$ więc dla dodatnich α oba wykładniki są ujemne. Oznacza to, że rozwiązanie q jest monotonicznie maleją funkcją czasu. Na skutek dużego tłumienia drgania nie wystąpią. Jest to tzw. *tłumienie aperiodyczne*, a ruch nazywa się *ruchem pełzającym.*

2. Dla liczby tłumienia $\alpha < 1$ wyróżnik Δ jest ujemny i pierwiastki równania (55) mają postać

$$r_{1,2} = -\alpha\omega \pm i\omega', \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega' := \omega\sqrt{1 - \alpha^2}. \tag{58}$$

Rozwiązanie jest wtedy następujące

$$q = e^{-\alpha\omega t}\left(Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}\right), \tag{59}$$

gdzie, w przeciwieństwie do poprzedniego przypadku, stałe A, B są teraz liczbami zespolonymi.

Oczywiście, wykorzystując związki

$$e^{i\omega' t} = \cos\omega' t + i\sin\omega' t, \quad e^{-i\omega' t} = \cos\omega' t - i\sin\omega' t, \tag{60}$$

możemy to rozwiązanie napisać w wygodniejszej postaci

$$q = e^{-\alpha\omega t}\left(q_c\cos\omega' t + q_s\sin\omega' t\right), \tag{61}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$q_c = A + B, \quad q_s = i\left(A - B\right). \tag{62}$$

Ponieważ to rozwiązanie musi być rzeczywiste, a więc i nowe stałe q_c, q_s muszą być rzeczywiste, więc otrzymujemy następujące ograniczenia na stałe w rozwiązaniu zespolonym (59)

$$\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B, \quad \operatorname{Im} A = -\operatorname{Im} B. \tag{63}$$

W praktycznych zastosowaniach zapisuje się rozwiązanie (61) również w innej postaci. Wprowadźmy oznaczenia

$$q_c = (\mathrm{am}q)\cos\psi, \quad q_s = (\mathrm{am}q)\cos\psi. \tag{64}$$

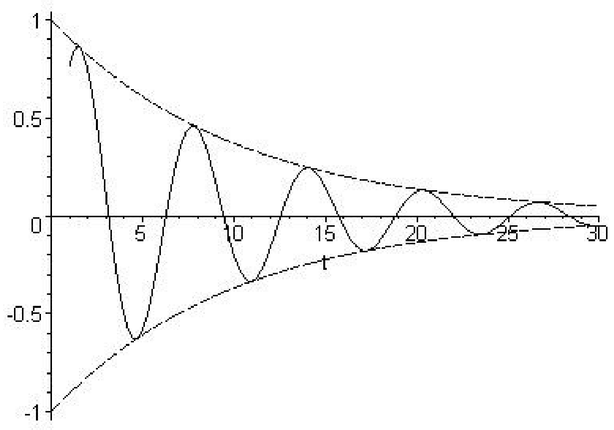
Odwracając te związki otrzymujemy

$$(\mathrm{am}q) = \sqrt{q_c^2 + q_s^2}, \quad \psi = \arctan\frac{q_c}{q_s}, \tag{65}$$

Pierwsza stała jest nazywana *amplitudą drgań*, a druga *przesunięciem fazowym*. Podstawienie w (61) i proste przekształcenie prowadzi do następującej postaci rozwiązania

$$q = e^{-\alpha\omega t}\,(\mathrm{am}q)\sin\left(\omega' t + \psi\right). \tag{66}$$

Rozwiązanie to jest schematycznie przedstawione na Rys. 9.



Rys. 9: *Drgania własne tłumione: wychylenie w funkcji czasu (schematycznie)*

Jak widać, część wykładnicza rozwiązania, spowodowana tłumieniem, wywołuje zmniejszanie się w czasie maksymalnych i minimalnych wartości wychylenia. Musi ono leżeć pomiędzy obwiedniami pokazanymi na Rysunku. Jednocześnie punkty zerowe powtarzają się okresowo, a długość tego okresu wynosi

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{T}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{67}$$

gdzie T jest okresem drgań nietłumionych ($\alpha = 0$). Oczywiście $T' > T$, tzn. $\omega' < \omega$. Z powodu malenia maksimów w czasie funkcję opisującą drgania własne nazywamy funkcją *pseudookresową.* Malenie wychylenia wywołane tłumieniem wygodnie jest opisać stosunkiem wychyleń odległych o pseudookres T'. Definiujemy

$$\vartheta = \ln\frac{q(t)}{q(t+T')} = \frac{2\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}, \tag{68}$$

i wielkość ta jest nazywana *logarytmicznym dekrementem tłumienia.* Dla wielu konstrukcji można ją mierzyć łatwiej niż współczynniki c lub α. Przyjmuje się orientacyjnie następujące wartości

– $\vartheta = 0,3 \div 0,4$ dla żelbetowych ramowych fundamentów pod maszyny,
– $\vartheta = 0,05 \div 0,15$ dla stalowych ramowych fundamentów pod maszyny,
– $\vartheta = 0,6 \div 0,7$ dla fundamentów blokowych na gruncie.

Oczywiście, w razie potrzeby można liczbę tłumienia α wyrazić przez logarytmiczny dekrement tłumienia

$$\alpha = \frac{\vartheta}{\sqrt{4\pi^2+\vartheta^2}} \approx \frac{\vartheta}{2\pi}, \tag{69}$$

gdzie druga część związku wynika z faktu, że $\vartheta^2 \ll 4\pi^2 \approx 39,4784$ dla większości konstrukcji budowlanych.

2.3 Drgania wymuszone

Rozważmy ponownie układ o jednym stopniu swobody, ale tym razem drgania są wymuszone siłą zewnętrzną. Najczęściej w zastosowaniach jest to albo siła okresowa, pochodząca od urządzenia, w której ruch obrotowy jest zakłucany przez mimośród, albo też jest to siła udarowa. Ten drugi przypadek rozważymy w tych notatkach jedynie marginesowo. Zacznijmy od przypadku pierwszego. Liniowe równanie ruchu ma w tym przypadku postać

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = P_s \sin pt + P_c \cos pt, \tag{70}$$

gdzie P_s, P_c są stałymi współczynnikami, a p oznacza zadaną częstotliwość siły wymuszającej. To niejednorodne liniowe równanie różniczkowe ma rozwiązanie, które jest sumą ogólnego rozwiązania q_0 równania jednorodnego i szczególnego rozwiązania q_1 równania niejednorodnego. Oczywiście, rozwiązanie równania jednorodnego q_0 ma postać (66), tzn.

$$q_0 = (\mathrm{am}q_0)\, e^{-\alpha\omega t} \sin(\omega' t + \psi),$$

i nie jest ono interesujące po długim czasie, gdyż zanika w wyniku tłumienia. Rozwiązania szczególnego równania niejednorodnego poszukujemy w postaci

$$q_1 = Q_s \sin pt + Q_c \cos pt, \tag{71}$$

gdzie stałe Q_s, Q_c należy wyznaczyć z równania. Podstawienie w (70) prowadzi do związku

$$\left[\left(k-mp^2\right)Q_s - pcQ_c - P_s\right]\sin pt + \left[\left(k-mp^2\right)Q_c + pcQ_c - P_c\right]\cos pt = 0. \tag{72}$$

Ponieważ związek ten musi zachodzić dla dowolnych czasów więc współczynniki przy $\sin pt$ i $\cos pt$ muszą znikać niezależnie. Otrzymujemy

$$\begin{aligned} Q_s\left(1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right) - \gamma\frac{p}{\omega}Q_c &= \frac{1}{k}P_s, \quad \omega := \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma := \frac{c}{\sqrt{km}} \equiv 2\alpha, \\ \gamma\frac{p}{\omega}Q_s + Q_c\left(1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right) &= \frac{1}{k}P_c. \end{aligned} \tag{73}$$

Współczynnik tłumienia $\gamma = 2\alpha$ zależy od typu konstrukcji i jego typowe wartości są zestawione poniżej.

Współczynnik tłumienia γ

konstrukcje	γ
stalowe	$0,010 \div 0,025$
drewniane	$0,030 \div 0,050$
murowane	$0,040 \div 0,080$
żelbetowe	$0,050 \div 0.100$

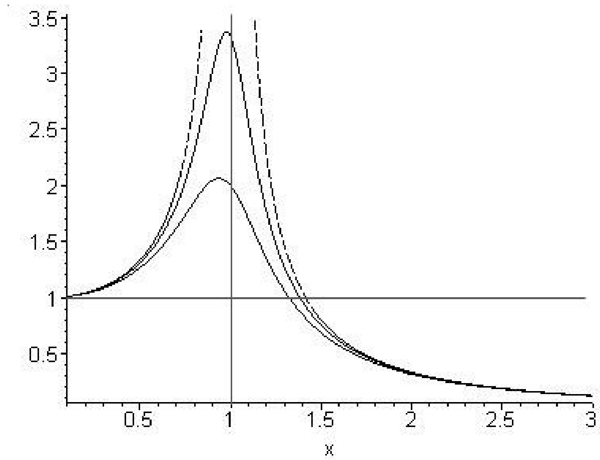
Układ dwóch równań (73) dla Q_s, Q_c ma następujące rozwiązanie

$$\begin{aligned} Q_s &= hP_s + h'P_c, \\ Q_c &= -h'P_s + hP_c, \end{aligned} \tag{74}$$

gdzie *funkcje podatności dynamicznej* h, h' są zdefiniowane wzorami

$$h := \frac{\nu^2}{k}\left(1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right), \quad h' := \frac{\nu^2}{k}\gamma\frac{p}{\omega}, \quad \nu := \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right)^2 + \gamma^2\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}; \tag{75}$$

wielkość bezwymiarową ν nazywamy *współczynnikiem dynamicznym.* Jego zmiany dla współczynnika tłumienia $\gamma = 0,\ 0,3,\ 0,5$ pokazane są na Rys. 10. Te krzywe nazywa się *rezonansowymi.* Jest oczywiste, że dla $\gamma = 0$ punkt $p = \omega$ jest punktem osobliwym – amplituda drgań rośnie do nieskończoności. To zjawisko nazywamy *rezonansem.* Dla współczynnika $\gamma \neq 0$ wartość amplitudy w punkcie rezonansu jest skończona. ale wyraźnie większa, niż poza tym punktem.



Rys. 10: *Krzywe rezonansowe dla* $\gamma = 0,\ 0,3,\ 0,5$.
Oś pozioma: $x = p/\omega$, *oś pionowa:* ν.

Wykorzystując wzory (74) otrzymujemy następującą postać całki szczególnej równania drgań

$$\begin{aligned} q_1 = P_s \frac{\nu^2}{k} & \left[\left(1 - \left(\frac{p}{\omega} \right)^2 \right) \sin pt - \gamma \frac{p}{\omega} \cos pt \right] + \\ & + P_c \frac{\nu^2}{k} \left[\gamma \frac{p}{\omega} \sin pt \left(1 - \left(\frac{p}{\omega} \right)^2 \right) \cos pt \right]. \end{aligned} \tag{76}$$

Wykonajmy podstawienie

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{p}{\omega} \right)^2 &= H \cos \psi, \\ \gamma \frac{p}{\omega} &= H \sin \psi, \end{aligned} \tag{77}$$

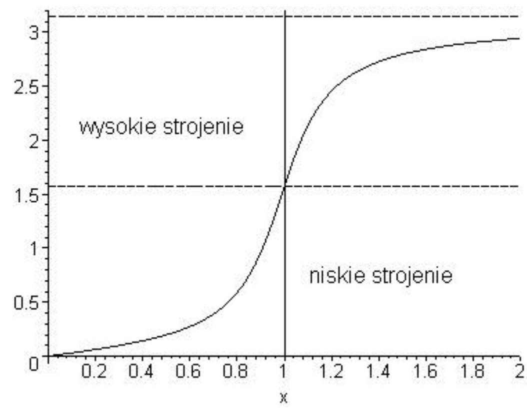
to znaczy

$$H = \frac{1}{\nu}, \quad \psi = \arctan \frac{\gamma \frac{p}{\omega}}{1 - \left(\frac{p}{\omega} \right)^2}. \tag{78}$$

Otrzymujemy

$$q_1 = P_s \frac{\nu}{k} \sin(pt - \psi) + P_c \frac{\nu}{k} \cos(pt - \psi). \tag{79}$$

Kąt ψ nazywamy *opóźnieniem fazowym.* W przypadku bez tłumienia $\gamma = 0$ mamy, oczywiście, $\psi = 0$. Natomiast w przypadku rezonansu $p = \omega$ opóźnienie fazowe $\psi = \pi/2$. W przypadku wysokich częstości drgań własnych ω częstości drgań wymuszających p są naogół mniejsze, niż częstości drgań własnych. Takie konstrukcje nazywamy *wysoko strojonymi.* Z tego powodu obszar $p/\omega < 1$ nazywa się obszarem *wysokiego strojenia* (patrz Rys. 11). W przeciwnym przypadku mówimy o obszarze *niskiego strojenia.* Konstrukcje nisko strojone są praktycznie mniej korzystne, niż konstrukcje wysoko strojone, gdyż każde przejście drgań wymuszających przez rezonans powoduje powstanie niebezpiecznych stanów konstrukcji.



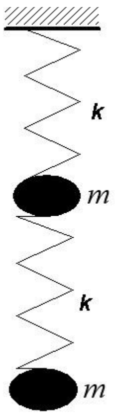
Rys. 11: *Opóźnienie fazowe ψ dla $\gamma = 0,3$ w funkcji $x = p/\omega$.*

3 Układy o wielu stopniach swobody

3.1 Trzy przykłady układów z dwoma zmiennymi uogólnionymi

Aby umotywować dalsze rozważania rozpatrzymy trzy proste przykłady układów sprężystych.

1) Rozważmy drgania dwóch jednakowych mas m zawieszonych szeregowo na sprężynach o tej samej sztywności k (Rys. 12).



Rys. 12: *Układ dwóch sprężyn*

Łatwo sprawdzić, że zasada d'Alamberta prowadzi do następujących równań ruchu dla tego układu

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= -kq_1 + k\left(q_2 - q_1\right), \\ m\ddot{q}_2 &= -k\left(q_2 - q_1\right), \end{aligned} \tag{80}$$

gdzie q_1, q_2 są pionowymi wychyleniami mas od stanu równowagi. Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$q_1 = Q_1 \sin \omega t, \quad q_2 = Q_2 \sin \omega t. \tag{81}$$

Podstawienie do (80) daje

$$\begin{aligned} \left(2k - m\omega^2\right) Q_1 - kQ_2 &= 0, \\ -kQ_1 + \left(k - m\omega^2\right) Q_1 &= 0. \end{aligned} \tag{82}$$

Jest to jednorodny układ równań, który posiada niezerowe rozwiązania, gdy znika jego wyznacznik. Prowadzi to do następującego równania charakterystycznego

$$\omega^4 - 3\frac{k}{m}\omega^2 + \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0. \tag{83}$$

Jego wyznacznik

$$\Delta = 5\left(\frac{k}{m}\right)^2, \tag{84}$$

jest dodatni, a więc otrzymujemy dwa rozwiązania dodatnie dla częstotliwości ω

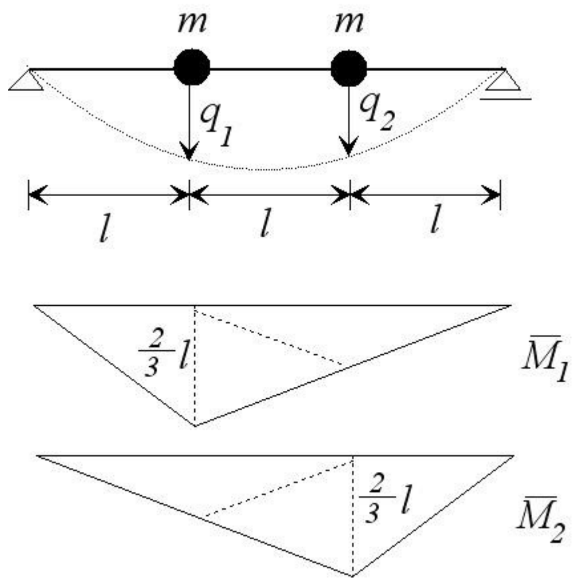
$$\omega = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{85}$$

Odpowiadają one dwóm *modom drgań*, których różnica staje się widoczna, gdy przeanalizujemy amplitudy. Oczywiście, wielkości Q_1, Q_2 nie da się wyznaczyć z jednorodnego układu równań (82). Natomiast ich stosunek jest następujący

$$\frac{Q_2}{Q_1} = 2 - \frac{m}{k}\omega^2 = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0, & \text{dla } \omega = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}, \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0, & \text{dla } \omega = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\sqrt{\frac{k}{m}}. \end{cases} \tag{86}$$

Oznacza to, że masy drgają z wychyleniem w tym samym kierunku – zgodnie w fazie – z niższą częstotliwością, a z wychyleniem w przeciwnym kierunku – w przeciwnej fazie – z wyższą częstotliwością.

2) Jako drugi przykład rozważymy dwie jednakowe masy m drgające swobodnie na belce sprężystej (patrz Rys. 13).



Rys. 13: *Drgania swobodne dwóch mas na belce sprężystej*

Równania drgań swobodnych tego układu wynikają z ogólnych równań dla układu sprężystego

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2)^T, \quad \mathbf{B} = \lceil m, m \rfloor, \tag{87}$$

gdzie $\lceil \ldots \rfloor$ oznacza macierz diagonalną, a $\mathbf{K}$ jest macierzą sztywności, którą trzeba wyznaczyć. Zrobimy to metodą sił. Współrzędne wektora $\mathbf{Kq}$ określają siły $\mathbf{Q}$ w punktach zaczepienia mas, które powodują w tych punktach ugięcia równe q_1, q_2. Mamy więc

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1\delta_{11} + Q_2\delta_{12}, \\ q_2 &= Q_1\delta_{21} + Q_2\delta_{22}, \end{aligned} \tag{88}$$

gdzie δ_{ij} są przemieszczeniami wirtualnymi od sił $Q_i = \bar{1}$. Zgodnie ze wzorami Mohra mamy

$$\delta_{ij} = \int_0^{3l} \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} dx. \tag{89}$$

Łatwe obliczenia dają dla *macierzy podatności*

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{l^3}{18EI} = \begin{bmatrix} 0,4444\frac{l^3}{EI} & 0,3889\frac{l^3}{EI} \\ 0,3889\frac{l^3}{EI} & 0,4444\frac{l^3}{EI} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{q} &= \mathbf{DQ}, \end{aligned} \tag{90}$$

Macierz odwrotna, tzn. macierz sztywności $\mathbf{K}$, $\mathbf{KD} = \mathbf{1}$, jest następująca (obliczona przy pomocy kodu *Maple 7*)

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{6EI}{5l^3} = \begin{bmatrix} 9,60 & -8,40 \\ -8,40 & 9,60 \end{bmatrix} \frac{EI}{l^3}. \tag{91}$$

Ostatecznie równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + 9,60\frac{EI}{l^3}q_1 - 8,40\frac{EI}{l^3}q_2 &= 0, \\ m\ddot{q}_2 - 8,40\frac{EI}{l^3}q_1 + 9,60\frac{EI}{l^3}q_2 &= 0. \end{aligned} \tag{92}$$

Poszukujemy rozwiązania w postaci

$$q_1 = A_1 \sin\omega t, \quad q_2 = A_2 \sin\omega t. \tag{93}$$

Podstawienie w (92) daje

$$\begin{aligned} \left(-m\omega^2 + 9,60\frac{EI}{l^3}\right) A_1 - 8,40\frac{EI}{l^3}A_2 &= 0, \\ -8,40\frac{EI}{l^3}A_1 + \left(-m\omega^2 + 9,60\frac{EI}{l^3}\right) A_2 &= 0. \end{aligned} \tag{94}$$

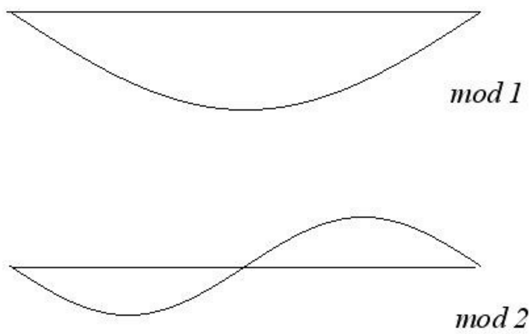
Tak, jak w poprzednim przykładzie, dostajemy równanie charakterystyczne

$$\left(\omega^2 - 9,60\frac{EI}{ml^3}\right)^2 - \left(8,40\frac{EI}{ml^3}\right)^2 = 0. \tag{95}$$

Rozwiązaniem są dwie częstotliwości dodatnie

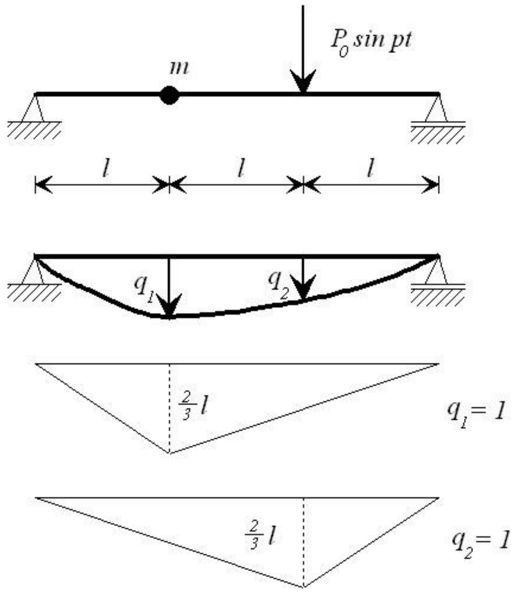
$$\omega_{(1)} = 1.095\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}, \quad \omega_{(2)} = 4.2447\sqrt{\frac{EI}{ml^3}}. \tag{96}$$

Odpowiadają one dwóm modom drgań, naszkicowanym na Rys. 14, które wynikają z oszacowania amplitud ze wzorów (94).



Rys. 14: *Mody drgań własnych belki z dwoma masami*

Trzeci przykład pokazuje sposób rozwiązania problemu, w którym ilość dynamicznych stopni swobody d (w naszym przykładzie $d = 1$) jest mniejsza od ilości współrzędnych uogólnionych n (w naszym przykładzie $n = 2$). Przykład ten jest pokazany na Rys. 15.



Rys. 15: *Układ z $d = 1$ i $n = 2$*

Macierz bezwładności jest w tym przypadku osobliwa

$$\mathbf{B} = \operatorname{diag}(m, 0). \tag{97}$$

Tak, jak w poprzednim przykładzie, macierz podatności obliczamy z rozkładów momentów dla, odpowiednio, $q_1 = 1$ i $q_2 = 1$, pokazanych również na powyższym rysunku. Wykorzystując wzór Mohra otrzymujemy (analitycznie)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{l^3}{18EI} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{6EI}{5l^3}. \tag{98}$$

Tym samym równania ruchu mają postać

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + 9.60\frac{EI}{l^3}q_1 - 8.40\frac{EI}{l^3}q_2 &= 0, \\ -8.40\frac{EI}{l^3}q_1 + 9.60\frac{EI}{l^3}q_2 &= P_0 \sin pt. \end{aligned} \tag{99}$$

Eliminacja q_2 prowadzi do następującego równania dla q_1

$$m\ddot{q}_1 + 2.25\frac{EI}{l^3}q_1 = 0.875P_0 \sin pt. \tag{100}$$

Szukamy rozwiązania szczególnego tego równania w postaci

$$q_1 = A \sin pt. \tag{101}$$

Po podstawieniu do (100) otrzymujemy natychmiast następującą wartość amplitudy A

$$A = \frac{0.875P_0}{2.25\frac{EI}{l^3} - mp^2}. \tag{102}$$

Daje to rozwiązanie problemu. Jednocześnie łatwo sprawdzić, że częstotliwość drgań własnych jest następująca

$$\omega = \sqrt{2.25\frac{EI}{ml^3}}, \tag{103}$$

i dla częstotliwości wymuszającej $p = \omega$ pojawia się rezonans.

3.2 Drgania własne

Przejdziemy obecnie do analizy równania (26), opisującego ruch układu o n stopniach swobody. Rozpatrzymy najpierw przypadek drgań własnych, tzn. $\mathbf{P}_{ext} = 0$ i pominiemy wpływ tłumienia. Szukamy więc rozwiązań następującego równania

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad \text{tzn.} \quad \sum_{j=1}^{n} \left(b_{ij}\ddot{q}_j + k_{ij}q_j\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{104}$$

Dla uproszczenia rozważań zakładamy, że n jest identyczne z ilością stopni swobody choć uogólnienie na przypadek $n > d$ nie jest trudne.

Rozwiązanie w postaci drgań harmonicznych ma postać

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_s \sin \omega t + \mathbf{q}_c \cos \omega t, \quad \text{tzn. } q_i = q_{si} \sin \omega t + q_{ci} \cos \omega t, \tag{105}$$

gdzie wektory $\mathbf{q}_s, \mathbf{q}_c$ są stałe i dowolne. Oczywiście, można to rozwiązanie również zapisać w postaci

$$q_i = (\mathrm{am}\mathbf{q})_i \sin(\omega t + \psi_i), \quad (\mathrm{am}\mathbf{q})_i = \sqrt{q_{si}^2 + q_{ci}^2}, \quad \psi_i = \arctan\frac{q_{ci}}{q_{si}}. \tag{106}$$

Podstawienie w równaniu (104) daje

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{B}\right)(\mathrm{am}\mathbf{q}) = 0. \tag{107}$$

Jest to jednorodny układ równań algebraicznych na wielkość amplitudy (am$\mathbf{q}$). Tego rodzaju problemy algebraiczne nazywa się *uogónionymi problemami na wartości własne.* Wielkości ω^2 nazywa się *wartościami własnymi*, a odpowiadające wektory (am$\mathbf{q}$) – *wektorami własnymi.* Problem jest uogólniony, gdyż macierz $\mathbf{B}$, w przeciwieństwie do zwykłych problemów własnych, nie jest jednostkowa ($\mathbf{B} \neq \mathbf{1}$, tzn $b_{ij} \neq \delta_{ij}$). Problem posiada nietrywialne rozwiązania (tzn. $(am\mathbf{q}) \neq 0$), gdy wyznacznik macierzy jego współczynników jest równy zeru

$$\det\left(\mathbf{K}-\omega^2\mathbf{B}\right) = 0. \tag{108}$$

Rozpisany dla poszczególnych zmiennych q_i ma on postać

$$\begin{vmatrix} k_{11}-\omega^2 b_{11} & \cdots & k_{1n}-\omega^2 b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n1}-\omega^2 b_{n1} & \cdots & k_{nn}-\omega^2 b_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{109}$$

Wynikające stąd równanie na ω^2 jest rzędu n i, zgodnie z podstawowym twierdzeniem algebry, posiada n rozwiązań. Ze względu na dodatnią określoność macierzy $\mathbf{K}$ i $\mathbf{B}$ rozwiązania te są rzeczywiste i dodatnie. Tym samym pierwiastki kwadratowe, określające ω są rzeczywiste. Wybieramy tylko te ze znakiem plus. Wygodnie jest je uporządkować

$$0 < \omega_{(1)} \leq \omega_{(2)} \leq \ldots \leq \omega_{(n)}. \tag{110}$$

Przypadki wielokrotnych pierwiastków (wartości własnych), tzn. przypadek, gdy dla pewnych k, $\omega_{(k)} = \omega_{(k+1)}$ wymaga prostej analizy dodatkowej, którą pomijamy w tych notatkach. Można ją znaleźć, na przykład, w rozdziale Langera (patrz literatura) na temat dynamiki ustrojów prętowych.

Każdemu rozwiązaniu $\omega_{(k)}$ odpowiada amplituda drgań $(am\mathbf{q})$ zadana przez równania (107). Jak już wspominaliśmy nazywamy ją *wektorem własnym* i oznaczamy $\mathbf{w}^{(k)}$ dla każdej wartości własnej $\omega_{(k)}$. Ze względu na jej interpretację fizyczną wielkość $\omega_{(k)}$ nazywamy *częstotliwością drgań własnych formy k*. Jest oczywiste, że dla wybranej częstotliwości $\omega_{(k)}$ równania (107) nie określają jednoznacznie wektora własnego $\mathbf{w}^{(k)}$, gdyż układ równań (107)

$$\left(\mathbf{K}-\omega_{(k)}^2\mathbf{B}\right)\mathbf{w}^{(k)} = 0, \tag{111}$$

jest jednorodny. Tą własność widzieliśmy już w przykładach, rozpatrywanych na początku tego rozdziału. Jednakże, jeśli wybierzemy dowolnie jedną ze współrzędnych, na przykład $w_n^{(k)}$ to pozostałe $n-1$ współrzędnych wynikają już jednoznacznie z niejednorodnego układu $n-1$ równań wybranych dowolnie spośród n równań (111).

Ponieważ układ równań (107) jest liniowy, więc dowolna kombinacja rozwiązań o różnych częstotliwościach i odpowiadających im wektorach własnych $\mathbf{w}^{(k)}$ jest również rozwiązaniem tego układu

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} A_k w_i^{(k)} \sin\left(\omega_{(k)} t + \psi_i\right). \tag{112}$$

To przedstawienie rozwiązania nazywamy *spektralnym*, a macierz diagonalną, utworzona z kwadratów częstotliwości

$$\mathbf{\Omega} = \left\lceil \omega_{(1)}^2, \ldots, \omega_{(n)}^2 \right\rfloor, \tag{113}$$

nazywamy *macierzą spektralną*. W dalszych rozważaniach zakładamy, że jest ona rzędu n.

Wektory własne posiadają pewne własności użyteczne w analizie drgań. Wybierzmy pewną częstotliwość $\omega_{(k)}$ i pomnóżmy skalarnie związane z nią równanie przez wektor własny $\mathbf{w}^{(l)}, l \neq k$. Mamy

$$\mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{K}\mathbf{w}^{(k)} = \omega_{(k)}^2 \mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{B}\mathbf{w}^{(k)}. \tag{114}$$

Ponieważ macierz sztywności $\mathbf{K}$ jest symetryczna, więc wektory $\mathbf{w}^{(k)}$ i $\mathbf{w}^{(l)}$ można zamienić miejscami (tzw. *lewe i prawe wektory własne* są identyczne). Otrzymujemy więc

$$\left(\omega_{(l)}^2 - \omega_{(k)}^2\right) \mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{B}\mathbf{w}^{(k)} = 0. \tag{115}$$

Ten związek może zachodzić dla różnych k i l tylko wtedy, gdy

$$\mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{B}\mathbf{w}^{(k)} = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq l, \tag{116}$$

gdzie wykorzystaliśmy założenie, że nie ma wielokrotnych wartości własnych. Jeśli to założenie nie jest spełnione, to, jak już wspominaliśmy, trzeba przeprowadzić pewne rozważania dodatkowe.

Własność (116) oznacza, że macierz $\mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{B}\mathbf{w}^{(k)}$ jest diagonalna. Oznaczmy jej elementy diagonalne przez $\tilde{b}_k$, tzn.

$$\left\lceil \tilde{b} \right\rfloor = \operatorname{diag}\left(\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_n\right) = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{b}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{b}_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{b}_k = \mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{B}\mathbf{w}^{(k)} > 0. \tag{117}$$

Wielkości $\tilde{b}_k$ nazywa się *bezwładnościami głównymi.*

Analogicznie można wykonać analizę dla macierzy sztywności. Mianowicie

$$\mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{B}\mathbf{w}^{(k)} = \frac{1}{\omega_{(k)}} \mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{K}\mathbf{w}^{(k)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{\omega_{(l)}} - \frac{1}{\omega_{(k)}}\right) \mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{K}\mathbf{w}^{(k)} = 0. \tag{118}$$

Tym samym

$$\mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{K}\mathbf{w}^{(k)} = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq l, \tag{119}$$

a więc macierz $\mathbf{w}^{(l)} \cdot \mathbf{K}\mathbf{w}^{(k)}$ jest również diagonalna i można ją zapisać w postaci

$$\left\lceil \tilde{k} \right\rfloor = \operatorname{diag}\left(\tilde{k}_1, \cdots, \tilde{k}_n\right) = \begin{bmatrix} \tilde{k}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \tilde{k}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{k}_n \end{bmatrix}, \quad \tilde{k}_{(k)} = \mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{K}\mathbf{w}^{(k)} > 0. \tag{120}$$

Elementy $\tilde{k}_{(k)}$ nazywamy *sztywnościami głównymi.*

Związki (116) i (119) są dla *wektorów własnych* warunkami *ortogonalności z wagą* względem, odpowiednio, bezwładności i sztywności. Waga ta jest równa jeden w przypadku zwykłych problemów na wartości własne. Do takiej postaci można również doprowadzić układ równań (111) mnożąc go przez macierz podatności $\mathbf{D}$

$$\left(\mathbf{I} - \omega_{(k)}\mathbf{D}\mathbf{B}\right) \mathbf{w}^{(k)} = 0, \quad \mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}. \tag{121}$$

Macierz podatności, w przeciwieństwie do macierzy sztywności, nie posiada jednak powyższej własności ortogonalności, tzn. nie daje się przedstawić w postaci macierzy diagonalnej.

W bazie wektorów własnych opis drgań jest szczególnie prosty. Mianowicie możemy wprowadzić nowe współrzędne uogólnione $\tilde{\mathbf{q}}$ w ten sposób, by energia kinetyczna i potencjalna miały postać

$$E_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{b}_k\left(\dot{\tilde{q}}_k\right)^2\right), \quad E_p = \sum_{k=1}^{n}\left(\tilde{k}_k\left(\tilde{q}_k\right)^2\right). \tag{122}$$

Wtedy równanie na drgania własne przyjmuje postać

$$\tilde{b}_k\ddot{\tilde{q}}_k + \tilde{k}_k q_k = 0, \quad \omega_{(k)} = \sqrt{\frac{\tilde{k}_k}{\tilde{b}_k}}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{123}$$

Równanie to opisuje dla każdego k tzw. k-tą *formę drgań* (*mod drgań* k).

Zauważmy jeszcze, że wektory własne można łatwo unormować do jedności. Na przykład, możemy zdefiniować

$$\bar{\mathbf{w}}^{(k)} = \mu_k \mathbf{w}^{(k)}, \quad \mu_k = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{w}^{(k)}\cdot\mathbf{B}\mathbf{w}^{(k)}}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{b}_k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_i^{(k)} w_j^{(k)}}}. \tag{124}$$

Wtedy

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(k)}\bar{w}_i^{(k)}\bar{w}_j^{(l)} = \delta_{kl}, \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\bar{w}_i^{(k)}\bar{w}_j^{(l)} = \omega_{(k)}^2\delta_{kl}. \tag{125}$$

O macierzach $\mathbf{B}$ i $\mathbf{K}$ wyrażonych przez związki (125) mówimy, że spełniają *zasadę ortogonalności.*

Pokażemy jeszcze inny dowód ortogonalności macierzy bezwładności i sztywności. Wprowadzoną w niej notację wykorzystujemy dalej w tych wykładach.

Oznaczmy przez $\mathbf{W}$ macierz utworzoną z wektorów własnych

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_1^{(1)} & w_1^{(2)} & \cdots & w_1^{(n)} \\ w_2^{(1)} & w_2^{(2)} & \cdots & w_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_n^{(1)} & w_n^{(2)} & \cdots & w_n^{(n)} \end{bmatrix}. \tag{126}$$

Wtedy problem na wartości własne można napisać w postaci

$$\mathbf{KW} = \mathbf{BW\Omega}, \quad \mathbf{\Omega} = \operatorname{diag}\left(\omega_{(1)}^2, \ldots, \omega_{(n)}^2\right). \tag{127}$$

Pomnóżmy to równanie macierzowe lewostronnie przez $\mathbf{W}^T$. Mamy

$$\mathbf{W}^T\mathbf{KW} = \mathbf{W}^T\mathbf{BW\Omega}. \tag{128}$$

Z symetrii macierzy $\mathbf{K}$ i $\mathbf{B}$ mamy

$$\left(\mathbf{W}^T\mathbf{KW}\right)^T = \mathbf{W}^T\mathbf{KW} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}^T\mathbf{BW\Omega} = \mathbf{\Omega W}^T\mathbf{BW}. \tag{129}$$

Ponieważ częstotliwości w macierzy diagonalnej $\mathbf{\Omega}$ są różne to ostatni związek może zachodzić tylko wtedy, gdy macierz $\mathbf{W}^T\mathbf{BW}$ jest diagonalna

$$\mathbf{W}^T\mathbf{BW} = \left[\tilde{b}\right]. \tag{130}$$

Ponieważ

$$\mathbf{\Omega}^{-1} = \left\lceil \frac{1}{\omega^2} \right\rfloor, \tag{131}$$

więc analogicznie

$$\mathbf{W}^T\mathbf{B}\mathbf{W} = \mathbf{W}^T\mathbf{K}\mathbf{W}\mathbf{\Omega}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}^T\mathbf{K}\mathbf{W} = \left\lceil \tilde{k} \right\rfloor. \tag{132}$$

Jeśli utworzymy macierz z unormowanych wektorów własnych, to oznaczamy ją przez $\bar{\mathbf{W}}$

$$\bar{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} \bar{w}_1^{(1)} & \bar{w}_1^{(2)} & \cdots & \bar{w}_1^{(n)} \\ \bar{w}_2^{(1)} & \bar{w}_2^{(2)} & \cdots & \bar{w}_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{w}_n^{(1)} & \bar{w}_n^{(2)} & \cdots & \bar{w}_n^{(n)} \end{bmatrix} \tag{133}$$

i nazywamy ją *macierzą modalną*. Przy jej pomocy związki (125) przyjmują prostą postać

$$\bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{K}\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{\Omega}, \quad \bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{B}\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{1}. \tag{134}$$

Związek (128) jest, oczywiście, identyczny z (114) jeśli wykorzysta się wprowadzony zapis. Podstawienie (134) w (128) prowadzi do tożsamości.

3.3 Dragania wymuszone harmoniczne i tłumienie

Powracamy teraz do analizy równania (26) w ogólnej postaci

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{P}_{ext}. \tag{135}$$

Dla harmonicznej siły zewnętrznej

$$\mathbf{P}_{ext} = \mathbf{P}_s \sin pt + \mathbf{P}_c \cos pt, \tag{136}$$

gdzie p jest częstotliwością siły wymuszającej, poszukujemy rozwiązania szczególnego w postaci

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_s \sin pt + \mathbf{q}_c \cos pt. \tag{137}$$

Podstawienie w równaniu (135) daje

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{K}-p^2\mathbf{B}\right)\mathbf{q}_s - p\mathbf{C}\mathbf{q}_c &= \mathbf{P}_s, \\ p\mathbf{C}\mathbf{q}_s + \left(\mathbf{K}-p^2\mathbf{B}\right)\mathbf{q}_c &= \mathbf{P}_c. \end{aligned} \tag{138}$$

Z tego układu równań można wyznaczyć $\mathbf{q}_s$ i $\mathbf{q}_c$.

Do zagadnienia można również podejść odmiennie. Opiszemy tu metodę, opartą na założeniu, że macierz tłumienia $\mathbf{C}$ spełnia zasadę ortogonalności. Jest to tzw. metoda *transformacji własnej.* Podziałajmy na równanie (135) od lewej strony macierzą modalną

$$\bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{B}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{W}}^{-1}\ddot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{C}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{W}}^{-1}\dot{\mathbf{q}} + \bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{K}\bar{\mathbf{W}}\bar{\mathbf{W}}^{-1}\mathbf{q} = \bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{P}_{ext}.$$

Przez wprowadzenie oznaczeń

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{W}}^{-1}\mathbf{q}, \quad \mathbf{Y} = \bar{\mathbf{W}}^T\mathbf{P}_{ext}, \tag{139}$$

sprowadzamy układ równań do postaci

$$\ddot{\mathbf{y}}+\lceil\gamma\omega\rfloor\,\dot{\mathbf{y}}+\mathbf{\Omega y}=\mathbf{Y}. \tag{140}$$

Współrzędne $\mathbf{y}$ nazywamy *współrzędnymi głównymi.*

Przypomnijmy, że dla układu o jednym stopniu swobody równanie to miało postać (70) i, dla tego przypadku, można je, oczywiście, przekształcić następująco

$$\ddot{q}+\gamma\omega\dot{q}+\omega^{2}q=\frac{1}{m}\left(P_{s}\sin pt+P_{c}\cos pt\right),\quad \gamma=\frac{c}{\sqrt{km}}. \tag{141}$$

Diagonalna macierz tłumienia w (140), wynikająca z założenia, że macierz tłumienia $\mathbf{C}$ spełnia założenie o ortogonalności, ma postać

$$\lceil\gamma\omega\rfloor=\operatorname{diag}\left(\gamma_{1}\omega_{(1)},\ldots,\gamma_{n}\omega_{(n)}\right). \tag{142}$$

gdzie współczynniki tłumienia γ_k dla poszczególnych form tłumienia muszą być zadane. Przyjmuje się często założenie, że macierz tłumienia składa się z dwóch części: macierzy tłumienia *masowego* i macierzy tłumienia *sztywnościowego*

$$\mathbf{C}=\mu\mathbf{B}+\kappa\mathbf{K}. \tag{143}$$

Pierwszy rodzaj tłumienia jest zewnętrzny i wynika z oporów na podporach, tarcia w łożyskach, działań atmosferycznych, itp. Drugi rodzaj jest wewnętrzny i wynika z lepkości materiału konstrukcyjnego. Współczynniki μ,κ określają współczynniki tłumienia γ_k poprzez zależności

$$\lceil\gamma\omega\rfloor=\bar{\mathbf{W}}^{T}\mathbf{C}\bar{\mathbf{W}}=\mu\mathbf{1}+\kappa\mathbf{\Omega}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{\gamma}_{k}=\frac{\mu}{\omega_{(k)}}+\kappa\omega_{(k)}. \tag{144}$$

Te związki pokazują, że tłumienie wewnętrzne rośnie szybko z rosnącą częstotliwością drgań własnych, co oznacza, że wyższe formy drgań (np. $\omega_{(k)}$) zanikają szybciej, niż niższe (np. $\omega_{(l)}<\omega_{(k)}$). Nie ma to miejsca dla tłumienia zewnętrznego drgań.

Dla drgań ustalonych, wymuszonych harmonicznie i słabo tłumionych, zakłada się często model tłumienia wewnętrznego ze współczynnikiem γ danym dla danego typu konstrukcji. Wtedy zakłada się

$$\kappa=\frac{\gamma}{p}, \tag{145}$$

gdzie p, jak poprzednio, jest częstotliwością siły zewnętrznej. Wtedy, na podstawie (144),

$$\gamma_{k}=\gamma\frac{\omega_{(k)}}{p}. \tag{146}$$

Wynik ten ma następującą interpretację. W pobliżu rezonansu $\omega_{(k)}\approx p$, współczynniki tłumienia dla poszczególnych form drgań są jednakowe: $\gamma_k\approx\gamma$. Daleko od rezonansu różnią się one od γ, ale w takich przypadkach, jak już wiemy, tłumienie jest pomijalne.

Przedstawimy alternatywną analizę powyższego problemu, urzywając zapisu we współrzędnych. Równanie (135) ma wtedy postać

$$\sum_{j=1}^{n}\left(b_{ij}\ddot{q}_{j}+c_{ij}\dot{q}_{j}+k_{ij}q_{j}\right)=P_{ext\,i}. \tag{147}$$

W bazie unormowanych wektorów własnych $\left\{\bar{w}_i^{(k)}\right\}$ mamy dla wektora $\mathbf{q}$ następującą reprezentację

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} y^{(k)} \bar{w}_i^{(k)}. \tag{148}$$

Wtedy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \ddot{q}_j &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \ddot{y}^{(k)} b_{ij} \bar{w}_j^{(k)}, \\
\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \dot{q}_j &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \dot{y}^{(k)} c_{ij} \bar{w}_j^{(k)}, \\
\sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_j &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} y^{(k)} k_{ij} \bar{w}_j^{(k)}.
\end{aligned} \tag{149}$$

Tworząc iloczyn skalarny tych wektorów z unormowanymi wektorami własnymi otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \ddot{y}^{(k)} \bar{w}_i^{(l)} b_{ij} \bar{w}_j^{(k)} &= \ddot{y}^{(l)}, \\
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \dot{y}^{(k)} \bar{w}_i^{(l)} c_{ij} \bar{w}_j^{(k)} &= \gamma_{(l)} \omega_{(l)} \dot{y}^{(l)}, \\
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} y^{(k)} \bar{w}_i^{(l)} k_{ij} \bar{w}_j^{(k)} &= \omega_{(l)}^2 y^{(l)},
\end{aligned} \tag{150}$$

gdzie drugi związek wynika z założenia, że macierz tłumienia spełnia zasadę ortogonalności, tzn.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_i^{(l)} c_{ij} \bar{w}_j^{(k)} = \gamma_{(l)} \omega_{(l)} \delta^{kl}. \tag{151}$$

Z powyższych rozważań wynika, że powyżej zdefiniowana transformacja układu odniesienia do układu unormowanych wektorów własnych, zwana *metodą transformacji własnej*, prowadzi do równań ruchu

$$\ddot{y}^{(l)} + \gamma_{(l)} \omega_{(l)} \dot{y}^{(l)} + \omega_{(l)}^2 y^{(l)} = Y^{(l)}, \quad Y^{(l)} = \sum_{i=1}^{n} \bar{w}_i^{(l)} P_{ext\, i}. \tag{152}$$

Współrzędne $y^{(l)}$ nazywa się *współrzędnymi głównymi.*

Jeśli przyjmiemy założenie (143), tzn.

$$c_{ij} = \mu b_{ij} + \kappa k_{ij}, \tag{153}$$

to otrzymamy

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_i^{(l)} c_{ij} \bar{w}_j^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \bar{w}_i^{(l)} \left(\mu b_{ij} + \kappa k_{ij}\right) \bar{w}_j^{(k)} = \mu \delta^{kl} + \kappa \omega_{(l)}^2 \delta^{kl} = \gamma_{(l)} \omega_{(l)} \delta^{kl}. \tag{154}$$

Mamy więc

$$\gamma_{(l)} = \frac{\mu}{\omega_{(l)}} + \kappa\omega_{(l)}. \tag{155}$$

Ten wynik jest, oczywiście, taki sam, jak (144). Reszta analizy nie ulega zmianie.

3.4 Układy prętowe

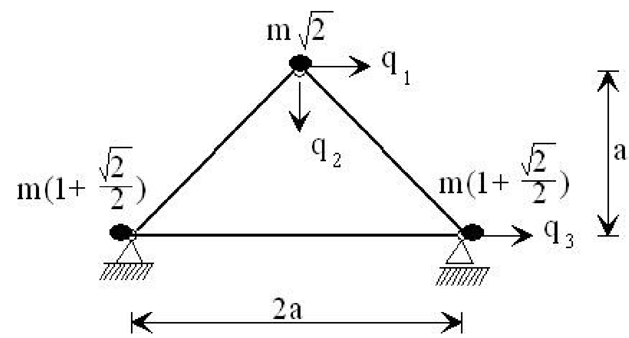
3.4.1 Drgania kratownic

Kratownice są zwykle modelowane jako struktura prętowa o węzłach przegubowych, obciążona siłami skupionymi w węzłach. Takie traktowanie tej struktury jest możliwe, jeśli pręty są dostatecznie smukłe. W przeciwnym razie trzeba uwzględnić siły powstające na skutek sztywności węzłów (na przykład kratownice Vierendaala), jak również ciągły rozkład masy wzdłuż prętów. W tym punkcie rozważamy przybliżenie, stosowane w statyce kratownic i zakładamy, że rozłożoną masę prętów można *zgranulować* i umieścić w postaci mas skoncentrowanych w węzłach, po połowie masy z każdego pręta dochodzącego do węzła.

Jako przykład rozpatrzymy równania drgań własnych

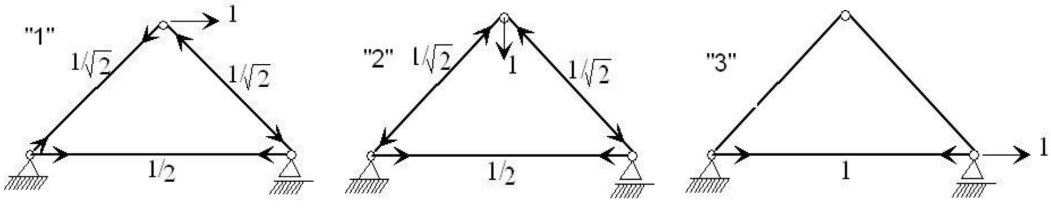
$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}, \tag{156}$$

układu sprężystego, przedstawionego na Rys. 15.



Rys. 16: *Przykład kratownicy z granulowaną masą*

Masa pręta kratownicy o długości a niech będzie równa m. Wtedy masy granulowane mają wartości przedstawione na Rys. 16. Zakładamy, że wszystkie pręty mają taką samą sztywność na ściskanie EA. Możliwe przemieszczenia mas oznaczamy przez q_1, q_2, q_3. Układ ma trzy dynamiczne stopnie swobody: $d = 3$. Macierz podatności dla takiego układu przemieszczeń wynika z rozwiązania trzech układów, przedstawionych na Rys. 17.



Rys.17.: *Stany do określenia macierzy podatności*

W tym prostym przypadku wzór Mohra na współczynniki macierzy podatności ma postać

$$\delta_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{N_i^\alpha N_j^\alpha l^\alpha}{EA}, \tag{157}$$

gdzie l^α jest długością pręta α. Proste obliczenia prowadzą do następującej macierzy

$$\mathbf{D} = [\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} 1.914213562 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1.914213562 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \frac{a}{EA}. \tag{158}$$

Macierz sztywności ma tym samym następującą postać

$$\mathbf{K} = [k_{ij}] = \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.707106781 & 0 & -0.353553391 \\ 0 & 0.707106781 & -0.353553391 \\ -0.353553391 & -0.353553391 & 0.853553907 \end{bmatrix} \frac{EA}{a}. \tag{159}$$

Problem drgań własnych jest teraz rozwiązaniem problemu na wartości własne układu

$$\sum_{j=1}^{3} \left(k_{ij} - \omega^2 b_{ij}\right) A_j = 0, \quad q_i = A_i \sin \omega t, \tag{160}$$

$$\mathbf{B} = [b_{ij}] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} m. \tag{161}$$

Zauważmy przy okazji, że dla układów o skończonej ilości stopni swobody macierz bezwładności **B** jest zawsze diagonalna.

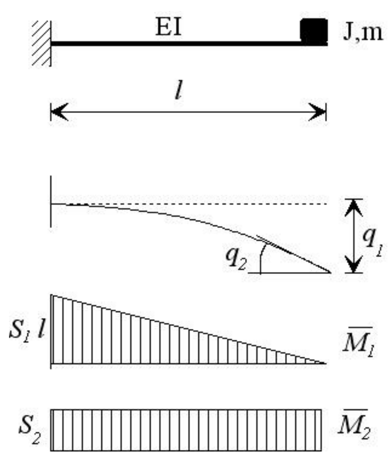
Rozwiązanie powyższego problemu własnego prowadzi do następujących trzech częstotliwości drgań własnych

$$\begin{aligned} \omega_{(1)} &= 0.422140822\sqrt{\frac{EA}{am}}, \quad \omega_{(2)} = 0.707106781\sqrt{\frac{EA}{am}}, \\ \omega_{(3)} &= 0.906530268\sqrt{\frac{EA}{am}}. \end{aligned} \tag{162}$$

Podstawienie tych trzech wartości w (160) daje trzy wektory własne, które całkowicie określają trzy mody drgań własnych powyższego układu.

3.4.2 Belki zginane

Rozpoczniemy analizę drgań belek zginanych od prostej belki wspornikowej obciążonej masą rozległą m o bezwładności obrotowej J (patrz Rys. 18). Rozwiążemy problem drgań własnych bez tłumienia. Układ ten ma dwa dynamiczne stopnie swobody: q_1 jest ugięciem końca belki (w przybliżeniu przemieszczeniem masy m), q_2 jest obrotem stycznej do linii ugięcia belki w punkcie końcowym (w przybliżeniu obrotem masy rozległej wokół jej środka masy).



Rys. 18: *Belka wspornikowa obciążona masą rozległą*

Jak zwykle dla problemów dyskretnych (tzn. o skończonej ilości stopni swobody) macierz bezwładności **B** jest diagonalna

$$\mathbf{B} = \mathrm{diag}\,(m, J) = \left\lceil \tilde{b} \right\rfloor. \tag{163}$$

Musimy wyznaczyć macierz sztywności **K**. Zrobimy to trzema sposobami, aby porównać wysiłek potrzebny do uzyskania układu równań.

Rozpoczniemy od *metody momentów wtórnych.* Przypomnijmy, że metoda ta opiera się na podobieństwie równań dla statycznego ugięcia belki w i dla momentu zginającego

$$w'' = -\frac{M}{EI}, \quad w'' := \frac{d^2 w}{dx^2}, \qquad \text{oraz} \qquad M'' = -q, \quad T = M', \tag{164}$$

gdzie q oznacza obciążenie ciągłe, a T siłę tnącą. Tym samym, dobierając odpowiednie waruki brzegowe dla w można tą funkcje otrzymać tak, jakby był to przebieg momentów zginających w belce zastępczej obciążonej obciążeniem ciągłym M/EI, a kąt obrotu linii ugięcia w' jako siłę tnącą w belce zastępczej.

Belka zastępcza jest belką wspornikową z zamocowaniem na prawym końcu (na lewym końcu moment wtórny i siła tnąca wtórna muszą być równe zero, bo ugięcie i obrót belki rzeczywistej jest w tym punkcie równe zero). Obciążamy belkę zastępczą kolejno momentem zginającym $\bar{M}_1$ od siły S_1, przyłożonej na końcu belki i odpowiadającej reakcji na ugięcie q_1, i momentem zginającym $\bar{M}_2$ od momentu S_2, odpowiadającemu obrotowi q_2 (patrz Rys. 18). Otrzymujemy

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2} S_1 l^2 \cdot \frac{2}{3} \frac{l}{EI} + S_2 l \cdot \frac{1}{2} \frac{l}{EI} = \frac{1}{3} \frac{l^3}{EI} S_1 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{EI} S_2, \\ q_2 &= \frac{1}{2} \frac{l^2}{EI} S_1 + \frac{l}{EI} S_2. \end{aligned} \tag{165}$$

Macierz podatności ma więc postać następującą

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{l^3}{3EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ \frac{l^2}{2EI} & \frac{l}{EI} \end{bmatrix}. \tag{166}$$

Macierz sztywności jest macierzą odwrotną do macierzy podatności i tym samym jest następująca

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}. \tag{167}$$

Powyższą analizę można zastąpić *metodą przemieszczeń (odkształceń)*. Układ podstawowy dla tej metody jest przedstawiony na Rys. 19. Trójkąt oznacza więź na obroty, a podpora – na przemieszczenia prawego końca belki. Siły w podporze dla, odpowiednio, $q_1 = 1$ i $q_2 = 1$, tzn.

$$S_1 = k_{11}q_1 + k_{12}q_2, \quad S_2 = k_{21}q_1 + k_{22}q_2, \tag{168}$$

dają bezpośrednio współrzędne macierzy sztywności.

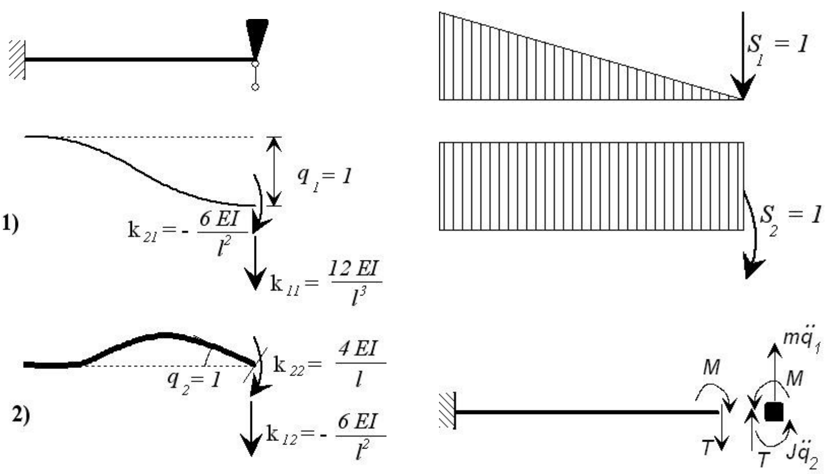
Dodajmy, że równania metody przemieszczeń można również otrzymać przy pomocy równań równowagi dynamicznej (zasady d'Alamberta) dla prawego węzła tego układu. Mają one postać

$$m\ddot{q}_1 + T = 0, \quad J\ddot{q}_2 + M = 0, \tag{169}$$

gdzie moment gnący M i siła tnąca T są znanymi funkcjami przemieszczeń uogólnionych q_1 i q_2. Postać tych funkcji jest zadana przez tzw. wzory transformacyjne, które omawiamy dalej. W rozpatrywanym przez nas przykładzie otrzymuje się przy pomocy tych wzorów następujące związki

$$T = \frac{12EI}{l^2}q_1 - \frac{6EI}{l^3}q_2, \quad M = -\frac{6EI}{l^2}q_1 + \frac{4EI}{l}q_2. \tag{170}$$

Wynikająca z nich macierz sztywności, jest, oczywiście, identyczna z macierzą (167).



Rys: 19: *Układ podstawowy dla metody przemieszczeń (lewy rysunek), rozkład momentów w metodzie sił (prawy górny rysunek), zasada d'Alamberta dla metody przemieszczeń (prawy.dolny rysunek)*

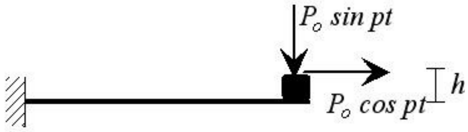
W *metodzie sił* poszukujemy przemieszczeń uogólnionych q_1, q_2 wywołanych obciążeniami uogólnionymi S_1, S_2 na kierunkach tych przemieszczeń. W prawej części Rys. 19 pokazano rozkład momentów dla obciążenia $S_1 = 1$ i, odpowiednio, $S_2 = 1$, których całkowanie (wzór Mohra) prowadzi do następujących współrzędnych macierzy podatności

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{2}{3}\frac{l}{EI} = \frac{l^3}{3EI}, \quad \delta_{12} = \frac{1}{2}l^2 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{l^2}{2EI}, \\ \delta_{21} &= \delta_{12}, \quad \delta_{22} = 1 \cdot l \cdot \frac{1}{EI} = \frac{l}{EI}, \end{aligned} \tag{171}$$

i związków
$$q_1 = \delta_{11}S_1 + \delta_{12}S_2, \quad q_2 = \delta_{21}S_1 + \delta_{22}S_2. \tag{172}$$
Wynik ten daje, oczywiście, macierz **D**, podaną we wzorze (166).

Przejdziemy teraz do problemu drgań własnych, opisanych równaniem
$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \tag{173}$$
Szukamy rozwiązania w postaci
$$q_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1), \quad q_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2). \tag{174}$$
Podstawienie powyższego rozwiązania w (173) i wykorzystanie wyników dla macierzy sztywności **K** daje następujący związek dla częstotliwości drgań własnych (wyznacznik układu równań dla stałych rozwiązania (174))
$$\Delta = \left(\frac{12EI}{l^3 m} - \omega^2\right)\left(\frac{4EI}{lJ} - \omega^2\right) - \frac{36(EI)^2}{l^4 mJ} = 0, \tag{175}$$
lub po rozpisaniu
$$\omega^4 - \omega^2\left(\frac{4EI}{lJ} + \frac{12EI}{l^3 m}\right) + \frac{12(EI)^2}{l^4 mJ} = 0. \tag{176}$$
Wyróżnik tego równania bikwadratowego
$$\left(\frac{4EI}{lJ} + \frac{12EI}{l^3 m}\right)^2 - \frac{48(EI)^2}{l^4 mJ} = \left(\frac{4EI}{lJ} - \frac{12EI}{l^3 m}\right)^2 + \frac{48(EI)^2}{l^4 mJ} > 0, \tag{177}$$
jest dodatni. Otrzymujemy więc dwa mody drgań własnych, odpowiadające częstotliwościom rzeczywistym
$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{4EI}{lJ} + \frac{12EI}{l^3 m}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{4EI}{lJ} + \frac{12EI}{l^3 m}\right)^2 - \frac{48(EI)^2}{l^4 mJ}}\right]}. \tag{178}$$
Zauważmy, że wyrażenie pod pierwiastkiem jest zawsze dodatnie, a więc istnieją dwa mody drgań.

Jako przykład drgań wymuszonych rozpatrzmy powyższy układ obciążony siłą okresową pokazaną na Rys. 20.



Rys. 20: *Harmoniczne siły wymuszające*

Wtedy równania ruchu są następujące
$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 &= P_0 \sin pt, \\ J\ddot{q}_2 + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 &= P_0 h \cos pt, \end{aligned} \tag{179}$$

gdzie współrzędne macierzy sztywności $\mathbf{K}$ są zadane wzorem (167). Ich rozwiązań szczególnych poszukujemy w postaci

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 \sin pt + A_2 \cos pt, \\ q_2 &= B_1 \sin pt + B_2 \cos pt. \end{aligned} \tag{180}$$

Podstawienie (180) w (179) prowadzi do układu równań algebraicznych dla stałych $A_1, ..., B_2$

$$\begin{aligned} \left(k_{11} - mp^2\right) A_1 + k_{12} B_1 &= P_0, \\ \left(k_{22} - Jp^2\right) B_1 + k_{12} A_1 &= 0, \\ \left(k_{11} - mp^2\right) A_2 + k_{12} B_2 &= 0, \\ \left(k_{22} - Jp^2\right) B_2 + k_{12} A_2 &= P_0 h. \end{aligned} \tag{181}$$

Rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{k_{22} - Jp^2}{\Delta_p} P_0, \quad B_1 = -\frac{k_{12}}{\Delta_p} P_0, \\ A_2 &= -\frac{k_{12}}{\Delta_p} P_0 h, \quad B_2 = \frac{k_{11} - mp^2}{\Delta_p} P_0 h, \end{aligned} \tag{182}$$

gdzie

$$\Delta_p = \left(k_{11} - mp^2\right)\left(k_{22} - Jp^2\right) - k_{12}^2. \tag{183}$$

Oczywiście, układ wpada w rezonans, gdy $p = \omega$, gdzie ω jest jedną z częstotliwości własnych, wyznaczonych poprzednio. W tym bowiem przypadku Δ_p staje się równe Δ (wzór (175)), a więc równe zero, a stałe $A_1, ..., B_2$ dążą do nieskończoności.

Jak pokazuje powyższy przykład, równanie drgań belki najłatwiej jest skonstruować operając się na metodzie przemieszczeń do wyznaczania macierzy sztywności. Na przykład, dla belki swobodnie podpartej, obciążonej, jak pokazano na Rys. 21, trzeba skonstruować układ podstawowy, naszkicowany w dolnej części tego rysunku.

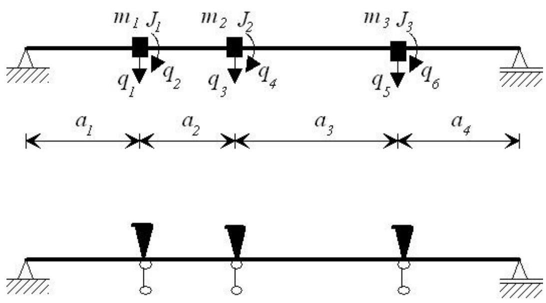
Analiza sześciu stanów: $\mathbf{q}_{(1)} = (1, 0, 0, 0, 0, 0), ..., \mathbf{q}_{(6)} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$ prowadzi do następującej macierzy sztywności

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{3}{a_1^3} + \frac{12}{a_2^3} & -\frac{3}{a_1^2} + \frac{6}{a_2^2} & -\frac{12}{a_2^3} & \frac{6}{a_2^2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{a_1^2} + \frac{6}{a_2^2} & \frac{3}{a_1} + \frac{4}{a_2} & -\frac{6}{a_2^2} & \frac{2}{a_2} & 0 & 0 \\ -\frac{12}{a_2^3} & -\frac{6}{a_2^2} & \frac{12}{a_2^3} + \frac{12}{a_1^3} & -\frac{6}{a_2^2} + \frac{6}{a_3^2} & -\frac{12}{a_3^2} & \frac{6}{a_3^2} \\ \frac{6}{a_2^2} & \frac{2}{a_2} & -\frac{6}{a_2^2} + \frac{6}{a_3^2} & \frac{4}{a_2} + \frac{4}{a_3} & -\frac{6}{a_3^2} & \frac{2}{a_3} \\ 0 & 0 & -\frac{12}{a_3^2} & -\frac{6}{a_3^2} & \frac{3}{a_4^3} + \frac{12}{a_3^3} & -\frac{3}{a_4^2} - \frac{6}{a_3^2} \\ 0 & 0 & \frac{6}{a_3^2} & \frac{2}{a_3} & -\frac{3}{a_4^2} - \frac{6}{a_3^2} & \frac{3}{a_4^3} + \frac{4}{a_3^3} \end{bmatrix} \cdot EI \tag{184}$$

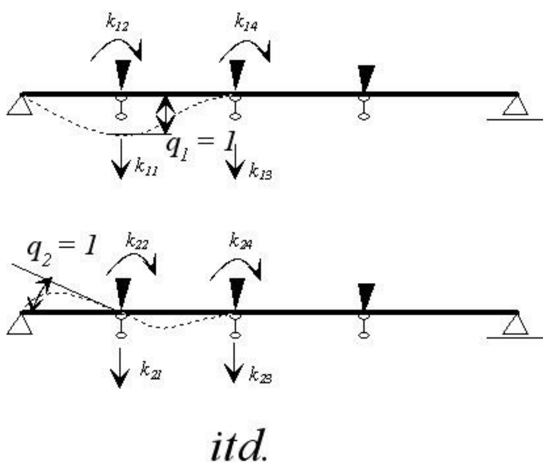
Macierz bezwładności jest, oczywiście, diagonalna i ma postać

$$\mathbf{B} = \operatorname{diag}\left(m_1, J_1, m_2, J_2, m_3, J_3\right). \tag{185}$$

a)



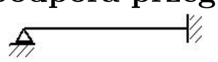
b)



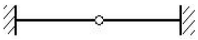
Rys. 21: *Belka swobodnie podparta obciążona trzema masami – układ o sześciu dynamicznych stopniach swobody* $q_1, ..., q_6$.
a) *Schemat do metody przemieszczeń*
b) *Stany podstawowe*

Uwaga: Dla przypomnienia w poniższej tabeli zestawiono wzory transformacyjne metody przemieszczeń dla pręta obustronnie zamocowanego, pręta z podporą przegubową w węźle i i w węźle, jak również dla pręta obustronnie zamocowanego z przegubem w środku przęsła. Oznaczenia: φ_i, φ_k – kąty obrotu węzła lewego i prawego, w_i, w_k – przesunięcia pionowe węzła lewego i prawego, M_{ik}, M_{ki} – momenty zginające węzła lewego i prawego, T_{ik}, T_{ki} – siły tnące węzła lewego i prawego.

Tabela: *wzory transformacyjne dla belki prostej*

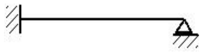
Obustronne zamocowanie	**Lewa podpora przegubowa**
	
$M_{ik} = \frac{2EI}{l}(2\varphi_i + \varphi_k) + \frac{6EI}{l^2}(w_i - w_k)$	$M_{ik} = 0$
$M_{ki} = \frac{2EI}{l}(\varphi_i + 2\varphi_k) + \frac{6EI}{l^2}(w_i - w_k)$	$M_{ki} = \frac{3EI}{l}\varphi_k + \frac{3EI}{l^2}(w_i - w_k)$
$T_{ik} = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_i + \varphi_k) - \frac{12EI}{l^3}(w_i - w_k)$	$T_{ik} = -\frac{3EI}{l^2}\varphi_k - \frac{3EI}{l^3}(w_i - w_k)$
$T_{ki} = -\frac{6EI}{l^2}(\varphi_i + \varphi_k) - \frac{12EI}{l^3}(w_i - w_k)$	$T_{ki} = -\frac{3EI}{l^2}\varphi_k - \frac{3EI}{l^3}(w_i - w_k)$

Przegub w połowie rozpiętości



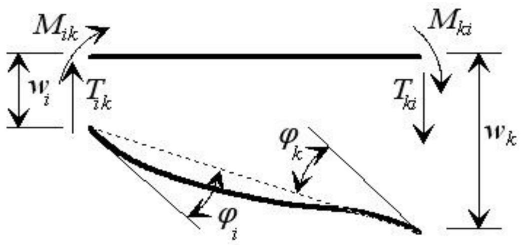
$$
\begin{aligned}
M_{ik} &= \tfrac{3EI}{l}\left(\varphi_i+\varphi_k\right)+\tfrac{6EI}{l^2}\left(w_i-w_k\right)\\
M_{ki} &= \tfrac{3EI}{l}\left(\varphi_i+\varphi_k\right)+\tfrac{6EI}{l^2}\left(w_i-w_k\right)\\
T_{ik} &= -\tfrac{6EI}{l^2}\left(\varphi_i+\varphi_k\right)-\tfrac{12EI}{l^3}\left(w_i-w_k\right)\\
T_{ki} &= -\tfrac{6EI}{l^2}\left(\varphi_i+\varphi_k\right)-\tfrac{12EI}{l^3}\left(w_i-w_k\right)
\end{aligned}
$$

Prawa podpora przegubowa



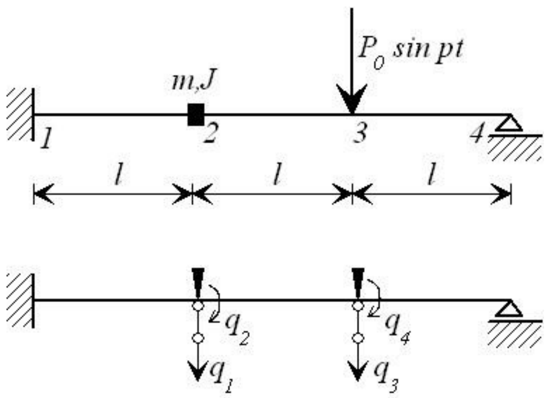
$$
\begin{aligned}
M_{ik} &= \tfrac{3EI}{l}\varphi_i+\tfrac{3EI}{l^2}\left(w_i-w_k\right)\\
M_{ki} &= 0\\
T_{ik} &= -\tfrac{3EI}{l^2}\varphi_i-\tfrac{3EI}{l^3}\left(w_i-w_k\right)\\
T_{ki} &= -\tfrac{3EI}{l^2}\varphi_i-\tfrac{3EI}{l^3}\left(w_i-w_k\right)
\end{aligned}
$$

Oznaczenia:



Przykłady

Zastosowanie wzorów transformacyjnych przedstawimy na kilku przykładach. Zacznijmy od belki naszkicowanej na poniższym Rysunku. Drgania tej belki można opisać przy pomocy czterech zmiennych uogólnionych.



Rys. 21a: *Belka obciążona zewnętrzną siłą harmoniczną w punkcie 3 i masą skupioną m o bezwładności obrotowej J*

Wyznaczamy najpierw macierz sztywności tej belki. W tym celu rozważamy cztery stany:

1) $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $q_3 = 0$, $q_4 = 0$. Warunek równowagi momentów węzła 2, warunek równowagi sił pionowych węzła 2, warunek równowagi sił pionowych węzła 3, i warunek równowagi momentów węzła 3 dają, odpowiednio, związki

$$
\begin{aligned}
k_{21}-M_{21}^1-M_{23}^1 &= 0 \quad\Rightarrow\quad k_{21}=-6\frac{EI}{l^2}+6\frac{EI}{l^2}=0,\\
k_{11}-T_{21}^1+T_{23}^1 &= 0 \quad\Rightarrow\quad k_{11}=12\frac{EI}{l^3}+12\frac{EI}{l^3}=24\frac{EI}{l^3},\\
k_{13}-T_{32}^1 &= 0 \quad\Rightarrow\quad k_{13}=-12\frac{EI}{l^3},\\
k_{14}-M_{32}^1 &= 0 \quad\Rightarrow\quad k_{14}=6\frac{EI}{l^2}.
\end{aligned}
\tag{186}
$$

2) $q_1 = 0, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = 0, \quad q_4 = 0$. Warunek równowagi sił pionowych węzła 2, warunek równowagi momentów węzła 2, warunek równowagi momentów węzła 3, warunek równowagi sił pionowych węzła 3 dają

$$
\begin{aligned}
k_{21} - T_{21}^2 + T_{23}^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{21} = -6\frac{EI}{l^2} + 6\frac{EI}{l^2} = 0, \\
k_{22} - M_{21}^2 - M_{23}^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{22} = 4\frac{EI}{l^2} + 4\frac{EI}{l^2} = 8\frac{EI}{l^2}, \\
k_{24} - M_{32}^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{24} = 2\frac{EI}{l^3}, \\
k_{14} - M_{32}^1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{14} = 6\frac{EI}{l^2}.
\end{aligned} \tag{187}
$$

3) $q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 1, \quad q_4 = 0$. Warunek równowagi momentów węzła 3, warunek równowagi sił pionowych węzła 3, warunek równowagi sił pionowych węzła 2, warunek równowagi momentów węzła 2 dają teraz

$$
\begin{aligned}
k_{34} - M_{34}^3 - M_{32}^3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{34} = -3\frac{EI}{l^2} - 6\frac{EI}{l^2} = -9\frac{EI}{l^2}, \\
k_{33} - T_{32}^3 + T_{34}^3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{33} = 12\frac{EI}{l^3} - 3\frac{EI}{l^3} = 9\frac{EI}{l^3}, \\
k_{13} + T_{23}^3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{13} = -12\frac{EI}{l^3}, \\
k_{23} - M_{23}^3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{23} = -6\frac{EI}{l^2}.
\end{aligned} \tag{188}
$$

4) $q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0, \quad q_4 = 1$. Warunek równowagi momentów węzła 3, warunek równowagi sił pionowych węzła 3, warunek równowagi sił pionowych węzła 2, warunek równowagi momentów węzła 2 dają w tym przypadku

$$
\begin{aligned}
k_{44} - M_{34}^4 - M_{32}^4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{44} = 3\frac{EI}{l} + 4\frac{EI}{l} = 7\frac{EI}{l}, \\
k_{34} + T_{34}^4 - T_{32}^4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{34} = -3\frac{EI}{l^2} - 6\frac{EI}{l^2} = -9\frac{EI}{l^2}, \\
k_{14} + T_{23}^4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{14} = 6\frac{EI}{l^2}, \\
k_{24} - M_{23}^4 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{24} = 2\frac{EI}{l^2}.
\end{aligned} \tag{189}
$$

Macierz sztywności jest więc następująca

$$
\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 24\frac{EI}{l^3} & 0 & -12\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^2} \\ 0 & 8\frac{EI}{l} & -6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} \\ -12\frac{EI}{l^3} & -6\frac{EI}{l^2} & 9\frac{EI}{l^2} & -9\frac{EI}{l^2} \\ 6\frac{EI}{l^2} & 2\frac{EI}{l} & -9\frac{EI}{l^2} & 7\frac{EI}{l} \end{bmatrix}. \tag{190}
$$

Równania ruchu przyjmują następującą postać

$$
\begin{aligned}
m\ddot{q}_1 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + k_{13}q_3 + k_{14}q_4 &= 0, \\
J\ddot{q}_2 + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 + k_{23}q_3 + k_{24}q_4 &= 0, \\
k_{31}q_1 + k_{32}q_2 + k_{33}q_3 + k_{34}q_4 &= P_0 \sin pt, \\
k_{41}q_1 + k_{42}q_2 + k_{43}q_3 + k_{44}q_4 &= 0,
\end{aligned} \tag{191}
$$

lub po redukcji do dwóch zmiennych q_1 i q_2

$$
\begin{aligned}
\ddot{q}_1 + 14,75\frac{EI}{ml^3}q_1 - 5\frac{EI}{ml^2}q_2 &= 0,136905\frac{P_0}{m}\sin pt, \\
\ddot{q}_2 - 3,5\frac{EI}{Jl^2}q_1 + 6\frac{EI}{Jl}q_2 &= 0,05924\frac{P_0}{m}\sin pt.
\end{aligned}
\tag{192}
$$

Oczywiście, interesujące są jedynie rozwiązania szczególne tych niejednorodnych równań różniczkowych, których szukamy w postaci

$$
q_1 = Q_1 \sin pt, \quad q_2 = Q_2 \sin pt. \tag{193}
$$

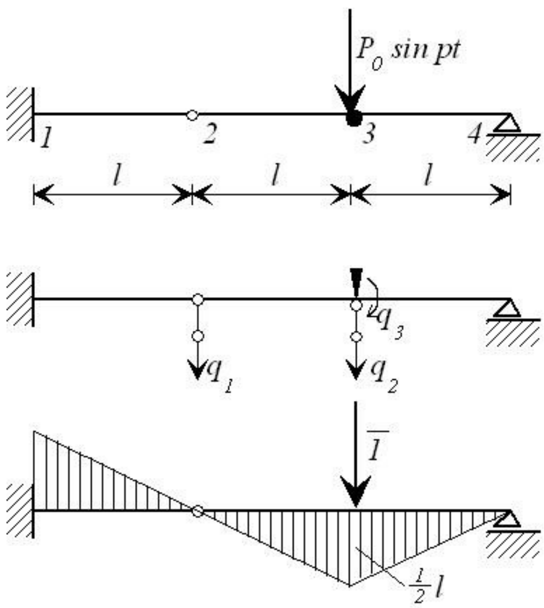
Stałe Q_1, Q_2 znajdujemy z równań algebraicznych, wynikających z równań ruchu

$$
\begin{aligned}
\left(14,75\frac{EI}{ml^3} - p^2\right)Q_1 - 5\frac{EI}{ml^2}Q_2 &= 0,136905\frac{P_0}{m}, \\
-3,5\frac{EI}{Jl^2}Q_1 + \left(6\frac{EI}{Jl} - p^2\right)Q_2 &= 0.059524\frac{P_0}{J}.
\end{aligned}
\tag{194}
$$

Po rozwiązaniu tych równań i wyznaczeniu q_1, q_2 pozostałe dwa przemieszczenia uogólnione obliczamy ze związków, które posłużyły nam do eliminacji równań ruchu

$$
\begin{aligned}
q_3 &= \frac{5}{24}q_1 + \frac{1}{6}q_2 l + \frac{P_0 l^3}{144EI}\sin pt, \\
q_4 &= -\frac{63}{56}\frac{q_1}{l} - \frac{1}{2}q_2 - \frac{P_0 l^2}{112EI}\sin pt.
\end{aligned}
\tag{195}
$$

Rozpatrzmy teraz przykład belki przedstawionej na Rys. 21b.



Rys. 21b: *Schemat do określenia drgań wymuszonych belki z przegubem*

Obliczymy najpierw macierz sztywności dla trzech uogólnionych przemieszczeń q_1, q_2, q_3. W tym celu rozważamy trzy stany:

1) $q_1 = 1, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 0$. Warunek równowagi sił pionowych węzła 2, warunek równowagi momentów węzła 3 i warunek równowagi sił pionowych węzła 3 dają, odpowiednio, związki

$$\begin{aligned} k_{11} - T_{21}^1 + T_{23}^1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{11} = 3\frac{EI}{l^3} + 3\frac{EI}{l^3} = 6\frac{EI}{l^3}, \\ k_{13} + M_{32}^1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{13} = 3\frac{EI}{l^2}, \\ k_{12} - T_{32}^1 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{12} = -3\frac{EI}{l^3}. \end{aligned} \tag{196}$$

2) $q_1 = 0, \quad q_2 = 1, \quad q_3 = 0$. Warunek równowagi sił pionowych węzła 3, warunek równowagi momentów węzła 3 i warunek równowagi sił pionowych węzła 2 dają

$$\begin{aligned} k_{22} - T_{32}^2 + T_{34}^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{22} = 3\frac{EI}{l^3} + 3\frac{EI}{l^3} = 6\frac{EI}{l^3}, \\ k_{23} - M_{32}^2 - M_{34}^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{23} = -3\frac{EI}{l^2} + 3\frac{EI}{l^2} = 0, \\ k_{12} + T_{23}^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{12} = -3\frac{EI}{l^3}. \end{aligned} \tag{197}$$

3) $q_1 = 0, \quad q_2 = 0, \quad q_3 = 1$. Warunek równowagi momentów węzła 3, warunek równowagi sił pionowych węzła 3 i warunek równowagi sił pionowych węzła 2 dają

$$\begin{aligned} k_{33} - M_{32}^3 - M_{34}^3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{33} = 3\frac{EI}{l} + 3\frac{EI}{l} = 6\frac{EI}{l}, \\ k_{23} - T_{32}^3 + T_{34}^3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{23} = -3\frac{EI}{l^2} + 3\frac{EI}{l^2} = 0, \\ k_{13} + T_{13}^3 &= 0 \quad \Rightarrow \quad k_{13} = 3\frac{EI}{l^2}. \end{aligned} \tag{198}$$

Macierz sztywności jest więc następująca

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6\frac{EI}{l^3} & -3\frac{EI}{l^3} & 3\frac{EI}{l^2} \\ -3\frac{EI}{l^3} & 6\frac{EI}{l^3} & 0 \\ 3\frac{EI}{l^2} & 0 & 6\frac{EI}{l} \end{bmatrix}. \tag{199}$$

Równania ruchu przyjmują postać

$$\begin{aligned} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + k_{13}q_3 &= 0, \\ m\ddot{q}_2 + k_{12}q_1 + k_{13}q_3 &= P_0 \sin pt, \\ k_{13}q_1 + k_{23}q_2 + k_{33}q_3 &= 0. \end{aligned} \tag{200}$$

Eliminując przemieszczenia uogólnione q_1, q_3

$$q_1 = \frac{2}{3}q_2, \quad q_3 = -\frac{1}{3l}q_2, \tag{201}$$

otrzymujemy następujące równanie różniczkowe

$$\ddot{q}_2 + 4\frac{EI}{l^3}q_2 = P_0 \sin pt, \tag{202}$$

którego całką szczególną jest oczywiście,

$$q_2 = \frac{P_0}{4\frac{EI}{l^3} - mp^2} \sin pt. \tag{203}$$

Ponieważ układ jest statycznie wyznaczalny można go również łatwo rozwiązać metodą sił. Wprowadzamy w tym celu siłę wirtualną $\bar{1}$ w kierunku przemieszczenia q_2 i z twierdzenia Mohra otrzymujemy następującą podatność (por. Rys. 21b)

$$\delta_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} l \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} l \cdot 3 \cdot \frac{1}{EI} = \frac{l^3}{4EI}. \tag{204}$$

Tym samym równanie ruchu wynika od razu w postaci otrzymanej po redukcji równań w metodzie przemieszczeń.

Przy pomocy wyników metody przemieszczeń można również łatwo otrzymać rozwiązanie zadania, w którym siła zewnętrzna działa w węźle 2 zamiast węzła 3. Macierz stywności pozostaje, oczywiście, bez zmian, a równania ruchu mają postać

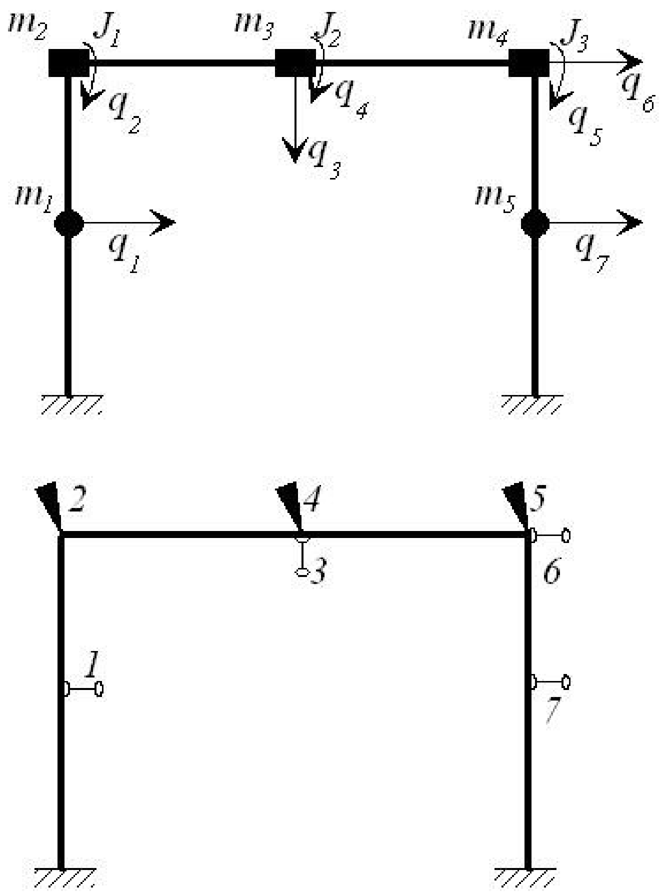
$$\begin{aligned} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + k_{13}q_3 &= P_0 \sin pt, \\ m\ddot{q}_2 + k_{12}q_1 + k_{13}q_3 &= 0, \\ k_{13}q_1 + k_{23}q_2 + k_{33}q_3 &= 0. \end{aligned} \tag{205}$$

Eliminacja q_1 i q_3 prowadzi łatwo do równania na q_2, którego całka szczególna ma w tym przypadku postać

$$q_2 = \frac{2}{3} \frac{P_0}{4\frac{EI}{l^3} - mp^2} \sin pt. \tag{206}$$

3.4.3 Ramy

Przedstawiony powyżej przykład belki zginanej pokazuje, że problem wyznaczania modów drgań własnych sprowadza się do zagadnienia własnego macierzy, które łatwo rozwiązać przy pomocy standardowych komputerowych kodów numerycznych (np. *Matlab, Maple* czy *Mathcad*). Z tego powodu, dla analizy drgań ram zginanych, o ile problem da się sprowadzić do zagadnienia o skończonej liczbie dynamicznych stopni swobody, wystarczy określić współrzędne uogólnione $\mathbf{q}$, macierz bezwładności $\mathbf{B}$, macierz sztywności $\mathbf{K}$, a resztę problemu rozwiązuje komputer. Zademonstrujemy to na prostym przykładzie, pokazanym na Rys. 22.



Rys. 22: *Przykład ramy o siedmiu dynamicznych stopniach swobody*

W tym przykładzie dynamiczne stopnie swobody określają cztery przemieszczenia q_1, q_3, q_6, q_7 i trzy obroty q_2, q_4, q_5. Zakładamy, że wpływ zmiany długości prętów jest pomijalny. Macierz bezwładności ma postać

$$\mathbf{B} = \operatorname{diag}\left(m_1, J_1, m_3, J_2, J_3, m_2 + m_3 + m_4, m_5\right). \tag{207}$$

Macierz sztywności można łatwo określić metodą przemieszczeń z układu podstawowego, przedstawionego w dolnej części rysunku. Należy do tego celu wykorzystać wzory transformacyjne, podane w Tabeli w poprzednim Pragrafie.

3.5 Zewnętrzne siły nieharmoniczne

Powrócimy teraz do problemu drgań, wymuszonych siłami zewnętrznymi. Rozważaliśmy dotąd jedynie siły harmoniczne. Analiza wymuszeń nieharmonicznych wymaga nieco bardziej zaawansowanych metod matematycznych (np. transformacji Laplace'a), o których będziemy mówili w dalszych wykładach. Tu ograniczymy się do zasygnalizowania problemu i rozważymy problem siły udarowej o bardzo krótkim działaniu. Jako przykład rozpatrzymy układ o jednym dynamicznym stopniu swobody, którego drgania są opisywane równaniem analogicznym do równania (70)

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = P_{ext}. \tag{208}$$

Zakładamy, że siła zewnętrzna działa przez bardzo krótki czas Δt i ma popęd Π. Oznacza to, że zmiana pędu w tym czasie prowadzi od wartości zerowej w chwili $t = 0$ do wartości $m\dot{q}\,(0^+) = \Pi$. Znak $^+$ w oznaczeniu czasu oznacza, że wartość początkowa pędu i jego wartość po upływie czasu Δt są utożsamiane. Wartość siły zewnętrznej w takim podejściu nie jest określona i zastępuje ją zadany popęd Π. Na przykład, dla sprężystego uderzenia z odskokiem masy m przez masę m_1 z prędkością v_1 wielkość impulsu (popędu) jest następująca[1]

$$\Pi = (1 + k_u)\, v_1 \frac{m m_1}{m + m_1}, \tag{209}$$

gdzie $k_u = 0 \div 1$ jest *współczynnikiem sprężystości (restytucji) uderzenia.*

Rozwiązania równania dla drgań wymuszonych szukamy w postaci

$$q = e^{-\alpha\omega t} \left(q_s \sin \omega' t + q_c \cos \omega' t \right), \tag{210}$$

z warunkami początkowymi

$$q\left(0^+\right) = 0, \quad \dot{q}\left(0^+\right) = \frac{\Pi}{m}. \tag{211}$$

Oznacza to, że rozwiązujemy jednorodne równanie (208) (tzn. $P_{ext} = 0$), a działanie siły zewnętrznej uwzględniamy poprzez warunek początkowy dla prędkości.

Występowanie siły P_{ext} prowadzi do rozwiązania z wkładem w postaci całki Duhamel'a, którą przedstawimy zwięźle w Paragrafie 4.3.3.

Wykorzystanie warunków początkowych (211) prowadzi do następujących stałych w rozwiązaniu (210)

$$q_c = 0, \quad q_s = \frac{\Pi}{m\omega'}. \tag{212}$$

Mamy więc ostatecznie

$$q = e^{-\alpha\omega t} \frac{\Pi}{m\omega'} \sin \omega' t = \frac{\Pi}{k} \omega e^{-\alpha\omega t} \frac{\sin \omega' t}{\sqrt{1 - \alpha^2}}. \tag{213}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$\beta = \arcsin \alpha. \tag{214}$$

Wtedy

$$q = \Pi \frac{\omega}{k} e^{-\alpha\omega t} \frac{\sin \omega' t}{\cos \beta}, \quad \dot{q} = \Pi \frac{\omega^2}{k} e^{-\alpha\omega t} \frac{\cos\left(\omega' t + \beta\right)}{\cos \beta}. \tag{215}$$

---

[1] W przypadku jednowymiarowego idealnie sprężystego ($k_u = 1$) zderzenia masy m_1 o prędkości v_1 z nieruchomą masą m mamy

a) bilans pędu $m_1 v_1 = m_1' v_1' + mv$,

b) bilans energii $\frac{1}{2} m_1 v_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m v^2$

gdzie v_1' – prędkość masy m_1 po zderzeniu. Z tych dwóch równań otrzymujemy prędkość v masy m po zderzeniu i pęd Π tej masy

$$v = 2 \frac{m_1}{m + m_1} v_1 \quad \Rightarrow \quad \Pi = 2 \frac{m m_1}{m + m_1} v_1,$$

tzn. wzór (209) dla $k_u = 1$.

Podobnie rozwiązuje się ogólny przypadek z rozpraszaniem energii, gdy współczynnik restytucji $k_u < 1$.

Ta postać rozwiązania pozwala łatwo określić maksymalną wartość wychylenia q. Mianowicie

$$\dot{q}(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega' t_0 + \beta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega t_0 = \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \frac{1}{\cos\beta}.$$

A więc

$$q_{\max} = \frac{\Pi}{k} \omega e^{-\alpha\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)/\cos\beta} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)}{\cos\beta} = \Pi \frac{\omega}{k} \exp\left[\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) \tan\beta\right]. \tag{216}$$

Przypadki bardziej skomplikowanych obciążeń zewnętrznych można opisać przy pomocy tzw. *całki Duhamela*. Powrócimy do tego problemu przy analizie problemów z ciągłym rozkładem masy.

4 Układy ciągłe

4.1 Przypomnienie liniowej teorii sprężystości

Analizę zagadnień dynamicznych układów ciągłych rozpoczniemy od najprostszego układu – pręta prostoliniowego z materiału liniowo sprężystego. Równania, opisujące jego zachowanie wyprowadzimy z równań liniowej teorii sprężystości dla materiałów izotropowych. W każdej chwili czasu t geometria takich ośrodków jest opisywana wektorem przemieszczenia $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, gdzie $\mathbf{x}$ oznacza wektor wodzący punktu ośrodka w chwili odniesienia $t = 0$. Dla określenia wektora przemieszczenia $\mathbf{u}$ wykorzystujemy trzy rodzaje związków

a) *warunki geometryczne i kinematyczne*

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \operatorname{sym}\operatorname{grad}\mathbf{u}, \quad \text{tzn.} \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \\ \mathbf{v} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \text{tzn.} \quad v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \end{aligned} \tag{217}$$

b) *równanie bilansu pędu*

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div}\mathbf{T}, \quad \text{tzn.} \quad \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{218}$$

gdzie pominięto wpływ zewnętrznych sił masowych; w razie potrzeby można je łatwo wprowadzić w końcowych równaniach,

c) *związki fizyczne (konstytutywne, prawo Hooke'a)*

$$\mathbf{T} = \lambda(\operatorname{tr}\mathbf{e})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{e}, \quad \text{tzn.} \quad \sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \tag{219}$$

W powyższych związkach $\mathbf{e}$ jest *tensorem małych deformacji Almansi-Hamela*, $\mathbf{v}$ jest *polem prędkości ośrodka*, $\mathbf{T}$ oznacza *tensor naprężeń Cauchy'ego*, parametry λ, μ są *stałymi sprężystości Lamé'go.* ρ jest stałą gęstością masy ośrodka. Po prawej stronie tych związków napisano je w układzie współrzędnych kartezjańskich, wykorzystując reprezentacje

$$\mathbf{u} = u_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{v} = v_i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{e} = e_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{T} = \sigma_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \tag{220}$$

Analizę tych związków dla przypadku trójwymiarowego przeprowadzimy później.

Czasem potrzebne są również związki odwrotne do związków Hooke'a. Można je łatwo wyprowadzić obliczając ślad w zależności (219)

$$\operatorname{tr}\mathbf{T} = (3\lambda + 2\mu)\operatorname{tr}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2\mu}\left(\mathbf{T} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\operatorname{tr}\mathbf{T}\right), \tag{221}$$

lub

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{11} - \nu\left(\sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\right), \\ e_{22} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{22} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{33}\right)\right), \\ e_{33} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{33} - \nu\left(\sigma_{11} + \sigma_{22}\right)\right), \\ e_{ij} &= \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} \quad \text{dla} \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{222}$$

gdzie

$$E = \mu\frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \tag{223}$$

A więc E jest *modułem Younga*, a ν – *liczbą Poissona.*

Zauważmy jeszcze, że kombinacja związków (217) prowadzi do następującej zależności

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = \operatorname{sym}\operatorname{grad}\mathbf{v}. \tag{224}$$

Jest to tzw. *warunek całkowalności pola deformacji* $\mathbf{e}$.

Podstawienie (217) i (219) w (218) prowadzi do następującego równania dla przemieszczenia

$$\begin{aligned} \rho\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + \mu\operatorname{div}\operatorname{grad}\mathbf{u}, \quad \text{tzn.} \\ \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} &= (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \tag{225}$$

Równania te nazywa się *równaniami Lamé'go* albo czasem *równaniami Navier'a.*

4.2 Dynamika pręta rozciąganego

4.2.1 Równanie falowe

Przeanalizujemy teraz przypadek jednowymiarowy ośrodka, w którym wszystkie pola zależą tylko od jednej zmiennej $x_1 = x$, a powierzchnia boczna jest walcem o tworzących równoległych do osi x. Zakładamy, że ta powierzchnia jest wolna od naprężeń, a kierunek osi x jest kierunkiem głównym naprężeń. Mamy więc

$$\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0. \tag{226}$$

Oznacza to, że odkształcenia postaciowe znikają $e_{12} = e_{13} = e_{23} = 0$, a znikanie naprężeń σ_{22} i σ_{33} prowadzi do następujących relacji między pozostałymi odkształceniami

$$e_{22} = e_{33} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}e_{11} \equiv -\nu e_{11}. \tag{227}$$

Podstawienie w prawie Hooke'a daje więc

$$\sigma = Ee, \quad \sigma \equiv \sigma_{11}, \quad e \equiv e_{11}. \tag{228}$$

Pełny układ równań dla pręta *rozciąganego* jest więc następujący

$$e = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad \sigma = Ee, \tag{229}$$

gdzie $u = u_1, v = v_1$. Połączenie tych równań prowadzi do następującego równania dla przemieszczenia $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 := \frac{E}{\rho}. \tag{230}$$

To równanie pojawia się w fizyce bardzo często i jest nazywane *równaniem falowym*. Przyczynę tej nazwy wyjaśnimy za chwilę. Od strony matematycznej należy ono do klasy tak zwanych różniczkowych cząstkowych równań *hiperbolicznych*.

Poszukiwanie rozwiązań równań hiperbolicznych jest oparte na *metodzie charakterystyk*. Metody tej nie będziemy tu bliżej wyjaśniali, ale jej stosowalność jest właśnie związana z hiperbolicznością równania. Dla równania (230) metoda charakterystyk prowadzi do pewnej transformacji zmiennych, przy pomocy której uzyskuje się ogólną postać rozwiązania równania (230). Transformacja ta ma postać

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x + ct. \tag{231}$$

Zakładając, że przemieszczenie u jest funkcją tych nowych zmiennych otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -c\frac{\partial u}{\partial \xi} + c\frac{\partial u}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + c^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \tag{232}$$

Podstawienie tych zależności w równaniu (230) daje równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \tag{233}$$

Całkowanie w tym równaniu względem ξ prowadzi do wniosku, że pochodna u względem η może być jedynie funkcją zmiennej η. Całkując teraz tą zależność względem η otrzymujemy ostatecznie następujące rozwiązanie

$$u(\xi,\eta) = u_+(\xi) + u_-(\eta), \tag{234}$$

gdzie funkcje u_+ i u_- są dowolnymi funkcjami jednej zmiennej, pierwsza ξ, a druga η. Powracając do starych zmiennych otrzymujemy

$$u(x,t) = u_+(x - ct) + u_-(x + ct). \tag{235}$$

Jest to tzw. *rozwiązanie d'Alamberta*. Zbadamy jego podstawowe własności. Aby określić postać funkcji u_+ i u_- potrzebne są dwa warunki. Mogą to być, na przykład warunki początkowe, które określają, powiedzmy, przemieszczenie u i prędkość $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ w chwili początkowej $t = 0$. Jest to tzw. *problem Cauchy'ego* i dla równań hiperbolicznych ma on zawsze, przynajmniej lokalnie w czasie, rozwiązanie. W naszym przypadku zakładamy wtedy, że funkcje

$$u(x, t = 0) = u_0(x), \quad v(x, t = 0) = v_0(x), \tag{236}$$

są zadane. Wtedy

$$u_+(x) + u_-(x) = u_0(x), \quad c\left[-u_+'(x) + u_-'(x)\right] = v_0(x), \tag{237}$$

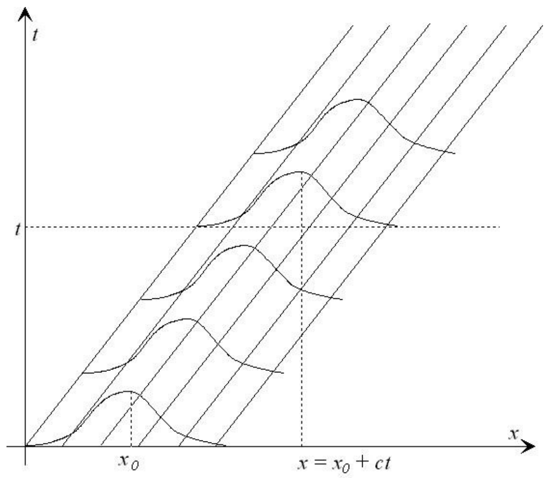
a po scałkowaniu drugiego warunku

$$\begin{aligned} u_+(x) + u_-(x) &= u_0(x), \\ -u_+(x) + u_-(x) &= \frac{1}{c}\int v_0 dx := V_0(x). \end{aligned} \tag{238}$$

Stała całkowania w tym związku jest nieistotna. Tym samym funkcje u_+ i u_- są znane. Na podstawie rozwiązania d'Alamberta pełne rozwiązanie problemu początkowego ma więc postać

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x - ct) - V_0(x - ct)\right] + \frac{1}{2}\left[u_0(x + ct) + V_0(x + ct)\right]. \tag{239}$$

Przedstawmy graficznie ten wynik. Dla uproszczenia przyjmijmy, że u_- jest równe zeru. Później skorygujemy to założenie. Na Rys. 23 przedstawiono schematycznie zachowanie się rozwiązania w czasie i w przestrzeni.



Rys. 23: *Propagacja zaburzenia u_+ w pręcie*

Powiedzmy, że obserwujemy przemieszczenie punktu, który w chwili $t = 0$ miał współrzędną x_0 i jego przemieszczenie początkowe było $u_+(x_0)$. Na podstawie rozwiązania d'Alamberta, po czasie t to samo przemieszczenie będzie miał punkt $x = x_0 + ct$. A więc zaznaczony na Rysunku schematycznie początkowy rozkład przemieszczeń będzie się przemieszczał bez zmiany kształtu z *prędkością c*. Graficznie należy wykres przemieszczenia przesuwać wzdłuż prostych $x = x(t = 0) + ct$, zaznaczonych na Rysunku. Proste te nazywamy *charakterystykami równania* (230). Takiej właśnie własności oczekujemy od *fali,* która propaguje się w dodatnim kierunku osi x. Stąd powstało oznaczenie tej części rozwiązania przez u_+. Jeśli różna od zera, analogiczną własność będzie miała część rozwiązania u_-, z tym że propagować się ona będzie w kierunku ujemnym osi x (z prędkością $-c$).

Główną cechą charakterystyczną fali jest jej własność propagacji. Będziemy później omawiali fale, które mają tą własność, ale nie zachowują kształtu funkcji. Mówimy wtedy o *dyspersji fali.*

4.2.2 Metoda rozdzielania zmiennych. Funkcje własne

Oprócz powyżej omówionej metody konstrukcji rozwiązania równania falowego, stosuje się w przypadku równań linowych *metodę rozdzielania zmiennych.* Przystępujemy do jej omówienia dla równania (230).

Załóżmy, że rozwiązanie da się zapisać w następującej postaci

$$u(x,t) = X(x)\,\Theta(t)\,. \tag{240}$$

Wtedy podstawienie do równania (230) prowadzi do związku

$$\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = c^2\frac{X''}{X} = -\omega^2, \quad \ddot{\Theta} := \frac{d^2\Theta}{dt^2}, \quad X'' := \frac{d^2X}{dx^2}, \tag{241}$$

gdzie ω jest na razie nieznaną stałą. Jej istnienie wynika z faktu, że w pierwszej zależności po lewej stronie znajduje się funkcja zmiennej t, a po prawej funkcja zmiennej x. Mogą one być sobie równe tylko wtedy, gdy są stałe.

Całkowanie tych dwóch równań prowadzi do związków

$$\Theta = A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}, \quad X = B_1 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx}, \quad k^2 := \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{242}$$

Rozwiązanie dla przemieszczenia ma więc postać

$$u(x,t) = U_1 e^{i(kx-\omega t)} + U_2 e^{i(kx+\omega t)}, \tag{243}$$

gdzie k, zgodnie z definicją, może przyjmować wartości dodatnie i ujemne. Rozwiązanie (243) ma, oczywiście postać szczególnego rozwiązania d'Alamberta. Ponieważ na ω nie nałożyliśmy żadnych ograniczeń, więc (243) przedstawia nieskończenie wiele rozwiązań. Również ich liniowe kombinacje są rozwiązaniami. Do omówienia tych liniowych kombinacji powrócimy później. Zwróćmy jedynie uwagę, że rozwiązania (242) można również zapisać w następującej postaci

$$\Theta = \Theta_1 \sin(\omega t + \varphi)\,, \quad X = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx, \quad k = \omega\sqrt{\frac{\mu}{EA}}, \quad \mu = \rho A, \tag{244}$$

gdzie A jest powierzchnią przekroju poprzecznego, a μ oznacza gęstość masy pręta na jednostkę długości. Stałą Θ_1 można włączyć do stałych C_1, C_2, a *faza* φ jest określana, na przykład, przez siły wymuszające. Na przykład, dla pręta swobodnie podpartego, obciążonego na podporze przesuwnej siłą harmoniczną $P_0 \cos pt$ muszą być spełnione warunki brzegowe

$$u(x=0,t) = 0, \quad E\frac{\partial u}{\partial x}(x=l,t) = \frac{P_0}{A}\cos pt, \tag{245}$$

gdzie l jest długością pręta. Z tych warunków wynika

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \omega = p, \quad C_2 = 0, \quad C_1 k \cos kl = \frac{P_0}{EA}, \quad \text{tzn. } C_1 = \frac{P_0}{p\sqrt{\mu EA}\cos kl}. \tag{246}$$

Rozwiązanie ma więc postać

$$u = \frac{P_0}{p\sqrt{\mu EA}} \frac{\sin kx}{\cos kl} \sin pt, \quad k = p\sqrt{\frac{\mu}{EA}}. \tag{247}$$

W szczególnym przypadku, gdy siła działająca na pręt jest równa zero, warunek brzegowy $(245)_2$ przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \cos kl &= 0 \quad \Rightarrow \quad kl = n\pi - \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, \dots \quad \text{tzn.} \\ \omega &= \omega_n, \quad \omega_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{EA}{\mu}}, \end{aligned} \tag{248}$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Zbiór wartości ω_n, określony powyżej, nazywa się *spektrum częstotliwości drgań własnych.*

Jak widzimy, w przypadku drgań własnych dla wszystkich częstotliwości ω_n z powyższego spektrum stała C_2 w związku (244) jest równa zero, a stałe C_{1n}, stowarzyszone z ω_n, można wybrać dowolnie. Funkcje

$$X_n = C_{1n} \sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{l}\right), \quad n = 1, \dots, \tag{249}$$

nazywamy *funkcjami własnymi* tego problemu brzegowego. Ciąg tych funkcji $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ posiada ważną własność *ortogonalności*, którą dyskutujemy poniżej.

Jeśli siła wymuszająca nie jest harmoniczna, to rozwiązania trzeba szukać w innej postaci. Jedną z możliwości jest przedstawienie przemieszczenia w postaci *szeregu Fourier'a*

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\Theta_{1n} \sin\omega_n t + \Theta_{2n} \cos\omega_n t\right) \sin k_n x, \quad k_n = \omega_n \sqrt{\frac{\mu}{EA}}. \tag{250}$$

Przedstawienie to wynika, oczywiście, z zasady superpozycji dla rozwiązań równań liniowych. Współczynniki Θ_{1n}, Θ_{2n} oblicza się z warunków początkowych

$$u\left(x, t = 0\right) = f\left(x\right), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\left(x, t = 0\right) = g\left(x\right), \tag{251}$$

gdzie $f(x), g(x)$ są zadanymi funkcjami. Aby te warunki wykorzystać, trzeba również przedstawić te funkcje w postaci szeregów Fourier'a

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin k_n x, \quad g\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin k_n x. \tag{252}$$

Takie przedstawienie jest możliwe, gdyż, jak już wspominaliśmy, ciąg funkcji $\{\sin k_n x\}_{n=0}^{\infty}$ jest *ortogonalny*. Przystępujemy do wyjaśnienia tego pojęcia.

Załóżmy, że powyższe szeregi są *jednostajnie zbieżne*, co oznacza, że można zamienić kolejnością operacje całkowania względem x i sumowania względem n. Tą własność sprawdza się w praktycznych zastosowaniach *a posteriori*. Wtedy mamy dla dowolnego m

$$\int_0^l f(x)\sin k_m x dx = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \int_0^l \sin k_n x \sin k_m x dx. \tag{253}$$

Zbadajmy całkę w tym wzorze. Całkując dwukrotnie przez części otrzymujemy

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin k_n x \sin k_m x dx &= -\frac{1}{k_m}\sin k_n x \cos k_m x\Big|_{x=0}^{l} + \frac{k_n}{k_m}\int_0^l \cos k_n x \cos k_m x dx = \\ &= \frac{k_n}{k_m}\left[\frac{1}{k_m}\cos k_n x \sin k_m x\Big|_{x=0}^{l} + \frac{k_n}{k_m}\int_0^l \sin k_n x \sin k_m x dx\right], \end{aligned}$$

skąd wynika

$$\left(1-\frac{k_n^2}{k_m^2}\right)\int_0^l \sin k_n x \sin k_m x dx = 0. \tag{254}$$

Ten związek jest spełniony dla $n = m$. W przeciwnym przypadku otrzymujemy

$$\int_0^l \sin k_n x \sin k_m x dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m. \tag{255}$$

To jest *warunek ortogonalności* ciągu funkcji $\{\sin k_n x\}_{n=0}^{\infty}$. Ponieważ k_n jest określone przez częstotliwoci własne, więc sam ciąg nazywamy *ciągiem funkcji własnych*. Dla takich funkcji, jak powyższa funkcja $f(x)$ pełnią one taką samą rolę, jak ortogonalne wektory bazowe dla rozkładu wektorów na współrzędne. Różnica polega na tym, że rozkłady (252) wykonuje się w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych.

Pozostaje wyznaczyć współczynniki f_n. W tym celu musimy wykonać całkowanie dla $n = m$

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin^2 k_m x dx &= -\frac{1}{k_m}\cos k_m x \sin k_m x\Big|_{x=0}^{l} + \int_0^l \cos^2 k_m x dx = \\ &= \int_0^l \left(1-\sin^2 k_m x\right) dx = \frac{l}{2}. \end{aligned} \tag{256}$$

Analogiczne obliczenia wykonuje się dla funkcji $g(x)$. Otrzymujemy więc

$$f_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin k_n x dx, \quad g_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin k_n x dx. \tag{257}$$

Są to wzory Fourier'a na współczynniki rozwinięcia (252).

Konstrukcja rozwiązania jest teraz prosta. Biorąc pod uwagę warunki początkowe (251) mamy

$$\Theta_{2n} = f_n, \quad \Theta_{1n} = \frac{g_n}{\omega_n}. \tag{258}$$

Zaznaczmy jeszcze, że przedstawiony powyżej ciąg funkcji własnych jest charakterystyczny dla rozciąganego pręta swobodnie podpartego. W zależności od geometrii problemu istnieje wiele innych postaci takich ciągów i należy je konstruować w każdym problemie indywidualnie. Ich struktura stanowi, na przykład, podstawę dla mechaniki cząstek elementarnych, którą nazywamy *mechaniką kwantową*.

4.2.3 Kontakt dwóch ośrodków

Rozważmy jeszcze problem o ważnym znaczeniu praktycznym, do którego można zastosować bezpośrednio rozwiązanie (243). Mianowicie rozpatrzymy propagację fali w pręcie o nieskończonej długości, którego lewa część (tzn. dla $x < 0$) jest zrobiona z materiału o module sprężystości E_- i gęstości masy ρ_-, a część prawa (tzn. $x > 0$) z materiału o module sprężystości E_+ i gęstości masy ρ_+. Na granicy między tymi dwoma materiałami mamy dwa warunki zgodności: 1) przemieszczenia po lewej i po prawej stronie granicy są takie same, oraz 2) naprężenia są równe. Oznacza to

$$u_{(-)}\left(0^-,t\right) = u_{(+)}\left(0^+,t\right), \quad E_-\frac{\partial u_{(-)}}{\partial x}\left(0^-,t\right) = E_+\frac{\partial u_{(+)}}{\partial x}\left(0^+,t\right), \tag{259}$$

gdzie u_-, u_+ są rozwiązaniami dla, odpowiednio, $x < 0$ i $x > 0$. Przyjmijmy, że fala o częstotliwości ω porusza się z kierunku $-\infty$. Załóżmy próbnie postać rozwiązań

$$\begin{aligned} u_{(-)} &= U^1_{(-)}e^{ik_-(x-c_-t)} \quad \text{dla } x<0, \quad u_{(+)} = U^1_{(+)}e^{ik_+(x-c_+t)} \quad \text{dla } x>0, \qquad (260)\\ k_- &= \frac{\omega}{c_-}, \quad k_+ = \frac{\omega}{c_+}, \quad c_- = \sqrt{\frac{E_-}{\rho_-}}, \quad c_+ = \sqrt{\frac{E_+}{\rho_+}}. \end{aligned}$$

Podstawienie do warunków zgodności (259) prowadzi do związków

$$U^1_{(-)} = U^1_{(+)}, \quad \sqrt{E_-\rho_-}U^1_{(-)} = \sqrt{E_+\rho_+}U^1_{(+)}. \tag{261}$$

Te dwa warunki mogą być spełnione jednocześnie tylko wtedy, gdy $U^1_- = U^1_+ = 0$. Oznacza to, że wybór rozwiązania (260) jest fałszywy. Fizycznie postać tego rozwiązania oznacza, że fala biegnie w jednym kierunku – w kierunku rosnącego x. Tymczasem należy oczekiwać, że na granicy $x = 0$ może nastąpić podział fali przychodzącej z lewej strony na falę, która biegnie dalej w tym samym kierunku w drugiej części pręta i na falę *odbitą* od granicy, która biegnie na lewo. Wtedy rozwiązanie trzeba zapisać w postaci

$$\begin{aligned} u_{(-)} &= U^1_{(-)}e^{ik_-(x-c_-t)} + U^2_{(-)}e^{-ik_-(x+c_-t)} \quad \text{dla } x<0, \qquad (262)\\ u_{(+)} &= U^1_{(+)}e^{ik_+(x-c_+t)} \quad \text{dla } x>0. \end{aligned}$$

Podstawienie do warunków zgodności (259) daje wtedy

$$\begin{aligned} U^1_{(-)} + U^2_{(-)} &= U^1_{(+)}, \qquad (263)\\ \sqrt{E_-\rho_-}\left(U^1_{(-)} - U^2_{(-)}\right) &= \sqrt{E_+\rho_+}U^1_{(+)}. \end{aligned}$$

Przyjmijmy, że amplituda fali padającej U^1_- jest znana. Wtedy powyższy układ równań określa następujące stosunki

$$T = \frac{U^1_{(+)}}{U^1_{(-)}} = 2\frac{\sqrt{E_-\rho_-}}{\sqrt{E_+\rho_+}+\sqrt{E_-\rho_-}} = \frac{2Z_-}{Z_-+Z_+}, \tag{264}$$

$$R = \frac{U^2_{(-)}}{U^1_{(-)}} = \frac{\sqrt{E_+\rho_+}-\sqrt{E_-\rho_-}}{\sqrt{E_+\rho_+}+\sqrt{E_-\rho_-}} = \frac{Z_--Z_+}{Z_-+Z_+}, \tag{265}$$

gdzie

$$Z_- = \sqrt{E_-\rho_-} = \rho_- c_-, \quad Z_+ = \sqrt{E_+\rho_+} = \rho_+ c_+, \tag{266}$$

jest *impedancją* pręta dla $x < 0$ i, odpowiednio, dla $x > 0$. Stosunki T i R nazywa się, odpowiednio, *współczynnikiem transmisji* i *współczynnikiem odbicia* (ang. reflection). Typowe wartości impedancji są następujące

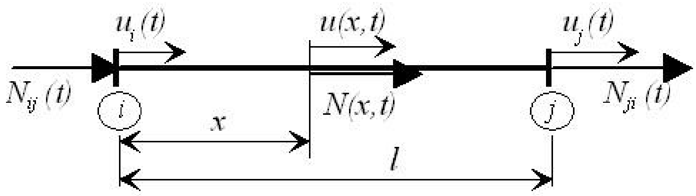
$$\begin{aligned} Z_{\text{powietrze}} &= 1 \cdot 333,5 = 333,5 \ \left[kg/m^2 \cdot s\right], \\ Z_{\text{beton}} &= 2500 \cdot 3300 = 8,25 \cdot 10^6 \ \left[kg/m^2 \cdot s\right], \\ Z_{\text{stal}} &= 7700 \cdot 5200 = 40,04 \cdot 10^6 \ \left[kg/m^2 \cdot s\right]. \end{aligned} \tag{267}$$

Jak łatwo sprawdzić, wartości impedancji mają decydujący wpływ na charakter fal przechodzących przez granice ośrodków. W przypadku $Z_- > Z_+$ mamy $T > 1$ i $R > 0$, co oznacza, że amplituda fali ulega wzmocnieniu po przejściu, a znak amplitudy fali odbitej jest taki sam, jak znak amplitudy fali padającej (lewa część Rys. 24). Natomiast w przypadku $Z_- < Z_+$ mamy $T < 1$ i $R < 0$, czyli amplituda fali ulega zmniejszeniu po przejściu, a znak amplitudy fali odbitej jest przeciwny do znaku amplitudy fali padającej (prawa część Rys. 24). Te własności mają istotne znaczenie w zastosowaniu fal w akustyce pomieszczeń, medycynie itp.

Rys. 24: *Przejście fali z ośrodka o wysokiej impedancji do ośrodka o niskiej impedancji* ($Z_- > Z_+$, lewa strona rysunku) *oraz z ośrodka o niskiej impedancji do ośrodka o wysokiej impedancji* ($Z_- < Z_+$, prawa strona rysunku)

4.2.4 Wzory transformacyjne

Paragraf ten zakończymy konstrukcją wzorów transformacyjnych metody przemieszczeń. Rozpatrujemy pręt o długości l, którego końce są oznaczone indeksami i i j (patrz: Rys. 25).



Rys. 25: *Oznaczenia do wzorów transformacyjnych pręta rozciąganego*

Gęstość siły działającej na pręt w punkcie x oznaczamy przez $N(x,t)$. Jej wartości w punktach końcowych są, odpowiednio, $N_{ij}(t) = -N(0,t), N_{ji}(t) = N(l,t)$. Badamy drgania harmoniczne

$$u(x,t) = u^0(x)\sin(\omega t + \varphi), \quad N(x,t) = N^0(x)\sin(\omega t + \varphi). \tag{268}$$

Postać rozkładu amplitudy przemieszczenia jest następująca (por. wzór (244))

$$u^0(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx, \quad k = \omega\sqrt{\frac{\mu}{EA}}. \tag{269}$$

Z warunków na brzegach wynika

$$\begin{aligned} C_2 &= u^0(0) = u_i^0, \quad u^0(l) = C_1 \sin kl + C_2 \cos kl = u_j^0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad C_1 = u_j^0 \frac{1}{\sin kl} - u_i^0 \cot kl. \end{aligned} \tag{270}$$

Ostatecznie

$$u^0(x) = \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl} u_i^0 + \frac{\sin kx}{\sin kl} u_j^0. \tag{271}$$

Biorąc pod uwagę prawo Hooke'a

$$N^0(x) = EA\frac{du^0}{dx}, \tag{272}$$

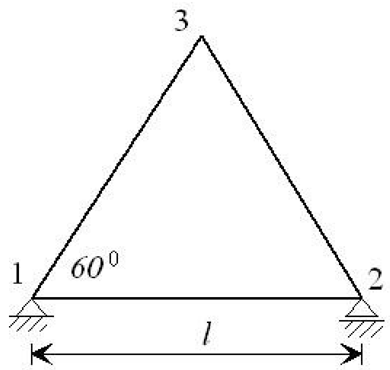
otrzymujemy ostateczny wynik – *wzory transformacyjne dla pręta rozciąganego*

$$N_{ij}(t) = N_{ij}^0(x) \sin(\omega t + \varphi), \tag{273}$$

$$\begin{aligned} N_{ij}^0 &= \frac{EA}{l}\left[\frac{kl}{\tan kl} u_i^0 - \frac{kl}{\sin kl} u_j^0\right], \\ N_{ji}^0 &= \frac{EA}{l}\left[-\frac{kl}{\sin kl} u_i^0 + \frac{kl}{\tan kl} u_j^0\right]. \end{aligned} \tag{274}$$

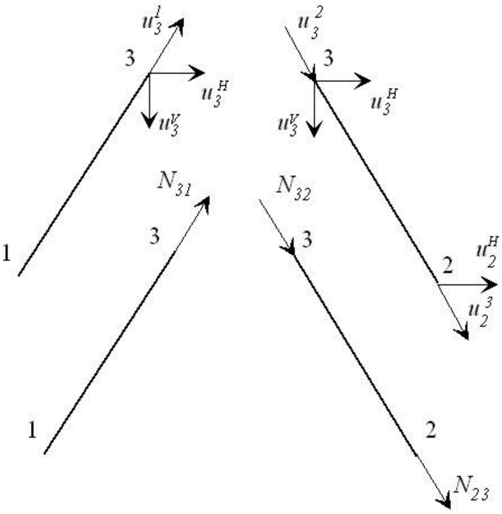
Przykłady zastosowania wzorów transformacyjnych

Rozważymy drgania własne kratownicy, przedstawionej na Rys. 25a. Wszystkie pręty mają jednakową sztywność na rozciąganie EA i gęstość masy na jednostkę długości μ. Trójkąt jest równoboczny.



Rys. 25a.: *Przykład kratownicy do obliczania drgań własnych*

Przemieszczenia węzłów sprowadzają się do trzech niezależnych wielkości: u_3^H, u_3^V, u_2^H (trzy dynamiczne stopnie swobody; patrz Rys. 25b).



Rys. 25b: *Przemieszczenia węzłów kratownicy*

Wtedy przemieszczenia węzłowe prętów mają postać

$$
\begin{aligned}
u_3^1 &= \frac{1}{2}u_3^H - \frac{\sqrt{3}}{2}u_3^V, \quad u_3^1 = \frac{1}{2}u_3^H + \frac{\sqrt{3}}{2}u_3^V, \\
u_2^3 &= \frac{1}{2}u_2^H, \quad u_2^1 = u_2^H.
\end{aligned}
\tag{275}
$$

Na podstawie wzorów transformacyjnych (274) otrzymujemy więc następujące wartości sił, działających w węzłach

– węzeł 3

$$
\begin{aligned}
N_{31} &= \frac{EA}{l}\frac{kl}{\tan kl}\left(\frac{1}{2}u_3^H - \frac{\sqrt{3}}{2}u_3^V\right), \\
N_{32} &= \frac{EA}{l}\left[\frac{kl}{\tan kl}\left(\frac{1}{2}u_3^H + \frac{\sqrt{3}}{2}u_3^V\right) - \frac{kl}{\sin kl}\frac{1}{2}u_2^H\right],
\end{aligned}
\tag{276}
$$

– węzeł 2

$$
\begin{aligned}
N_{21} &= \frac{EA}{l}\frac{kl}{\tan kl}u_2^H, \\
N_{23} &= \frac{EA}{l}\left[-\frac{kl}{\tan kl}\left(\frac{1}{2}u_3^H + \frac{\sqrt{3}}{2}u_3^V\right) + \frac{kl}{\tan kl}\frac{1}{2}u_2^H\right].
\end{aligned}
\tag{277}
$$

Pozostaje spełnić dynamiczne warunki równowagi dla tych dwóch węzłów. Trzy z nich pozwalają obliczyć reakcje w podporach, co jest dla rozważanego prob lemu drgań własnych nieistotne. Pozostałe trzy warunki mają postać

– węzeł 3

$$-N_{31} - N_{32} = 0, \quad N_{31} - N_{32} = 0, \tag{278}$$

– węzeł 2

$$-N_{21} - \frac{1}{2}N_{23} = 0. \tag{279}$$

Podstawienie wzorów (276), (277) prowadzi do układu trzech równań dla trzech niewiadomych u_3^H, u_3^V, u_2^H :

$$\begin{aligned} \cos kl\left(u_3^H-\sqrt{3}u_3^V\right)&=0,\\ \cos kl\left(u_3^H+\sqrt{3}u_3^V\right)-u_2^H&=0,\\ 5\cos klu_2^H-\left(u_3^H+\sqrt{3}u_3^V\right)&=0. \end{aligned} \tag{280}$$

Niezerowe rozwiązania istnieją, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków:

A)

$$\cos kl=0 \quad\Longrightarrow\quad k_nl=1,5708+n\pi, \tag{281}$$

tzn.

$$u_2^H=0, \quad u_3^H=-\sqrt{3}u_3^V, \tag{282}$$

czyli wektory własne dla dowolnego n mają postać

$$\left(u_3^H.-\frac{1}{\sqrt{3}}u_3^H,0\right)^T. \tag{283}$$

Oznacza to, że w czasie drgań tej formy węzeł 2 nie przemieszcza się, a pręt 2-3 ulega jedynie sztywnemu obrotowi.

B)

$$\cos kl\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad u_3^H=\sqrt{3}u_3^V, \quad u_2^H=2\cos klu_3^H, \tag{284}$$

oraz

$$\cos^2 kl=\frac{1}{5} \quad\Longrightarrow\quad k_nl=\begin{cases}1,1071+n\pi,\\ 2,0344+n\pi.\end{cases} \tag{285}$$

Wtedy wektor własny ma postać

$$\left(u_3^H,\frac{1}{\sqrt{3}}u_3^H,2\cos k_nlu_3^H\right)^T, \tag{286}$$

a więc drgają oba węzły 2 i 3.

Oczywiście spektrum drgań własnych jest dane wzorem

$$\omega_n=\sqrt{\frac{EA}{\mu l^2}}k_nl. \tag{287}$$

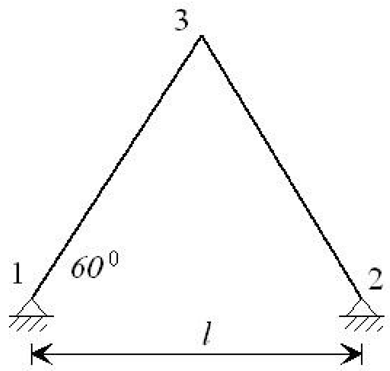
Policzymy ten przykład dla prętów stalowych o prostokątnym przekroju poprzecznym 3×10 cm, długości $l=3$ m. Wtedy

$$\begin{aligned} E&=210\text{ GPa},\quad EA=6,3\times 10^7\frac{\text{kgm}}{\text{s}^2}, \\ \rho&=7,5\times 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3},\quad \mu=0,25\times 10^7\frac{\text{kg}}{\text{m}},\quad \sqrt{\frac{EA}{\mu l^2}}=5,2915\frac{1}{\text{s}}. \end{aligned} \tag{288}$$

Podstawienie do (287) daje

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 5,8582\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 0,9324 \ [\mathrm{Hz}] \quad (\mathrm{mod\ B}), \\
\omega_2 &= 8,3119\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 1,3229 \ [\mathrm{Hz}] \quad (\mathrm{mod\ A}), \\
\omega_3 &= 10,7650\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = 1,7133 \ [\mathrm{Hz}] \quad (\mathrm{mod\ B}), ...\mathrm{itd.}
\end{aligned} \tag{289}$$

Dla porównania rozważmy jeszcze przypadek statycznie niewyznaczalny, przedstawiony na Rys. 25c.



Rys. 25c: *Przykład kratownicy statycznie niewyznaczalnej*

W tym przypadku trzeba określić z warunków równowagi węzła 3 wielkości dwóch składowych przemieszczenia tego węzła. Pozostałe cztery warunki określają siły reakcyjne. Postępując analogicznie, jak w poprzednim przykładzie dostajemy warunek

$$\frac{kl}{\tan kl} u_3^V = 0. \tag{290}$$

A więc

$$k_n l = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \Longrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{EA}{\mu l^2}} \left(1,5708 + n\pi\right). \tag{291}$$

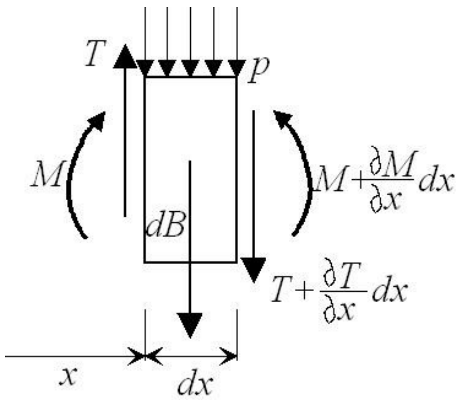
Porównanie tego wyniku z poprzednimi pokazuje, że sztywniejszy układ statycznie niewyznaczalny ma wyższą pierwszą częstotliwość drgań własnych. Dla przedstawionego powyżej przykładu mamy teraz

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= 8,3119\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1,3229 \ [\mathrm{Hz}], \\
\omega_2 &= 24,9356\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 3,9686 \ [\mathrm{Hz}], \\
\omega_3 &= 41,5594\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad f_3 = \frac{\omega_3}{2\pi} = 6,6144 \ [\mathrm{Hz}], ...\mathrm{itd.}
\end{aligned} \tag{292}$$

4.3 Dynamika pręta zginanego

4.3.1 Równanie osi ugiętej

Podobnie, jak równanie dla pręta rozciąganego, równania ruchu pręta zginanego można również wyprowadzić bezpośrednio z równań teorii sprężystości poprzez wprowadzenie założeń Kirchhoffa o płaskich przekrojach i małych deformacjach. Wynika stąd tzw.model Eulera-Bernoulli'ego. Poniżej przedstawimy bezpośrednią metodę opartą na analizie równowagi dynamicznej elementu takiego pręta (por. Rys. 26). Wielkością poszukiwaną jest ugięcie osi obojętnej pręta prostoliniowego, które oznaczamy przez $w(x,t)$, gdzie x jest zmienną wzdłuż osi obojętnej. Wtedy w przybliżeniu $\partial^2 w/\partial x^2$ jest krzywizną osi zdeformowanej (zmiana kąta obrotu zdeformowanej osi pręta), a $\partial^2 w/\partial t^2$ jest przyspieszeniem w otoczeniu dowolnego punktu osi.



Rys. 26: *Siły działające na element pręta zginanego*

Warunki dynamicznej równowagi (zasada d'Alamberta) elementu pręta o długości dx mają postać

$$\begin{aligned} dB + T + \frac{\partial T}{\partial x}dx - T + pdx &= 0, \quad dB = -\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}dx, \\ M - M - \frac{\partial M}{\partial x} + Tdx - dB\frac{dx}{2} - pdx\frac{dx}{2} &= 0. \end{aligned} \tag{293}$$

W tych związkach M jest momentem zginającym, T siłą tnącą, B siłą bezwładności, p intensywnością obciążenia ciągłego. Po uproszczeniu otrzymujemy

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} + p, \quad T = \frac{\partial M}{\partial x}. \tag{294}$$

W teorii Kirchhoffa zachodzi następujący związek *konstytutywny* (*materiałowy*) pomiędzy momentem zginającym M i krzywizną

$$M = -EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{295}$$

gdzie zakładamy, że sztywność pręta na zginanie EI jest stała.

Połączenie tych związków prowadzi do następującego równania dla ugięcia w

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p. \tag{296}$$

W przeciwieństwie do równania dla pręta rozciąganego to równanie nie jest hiperboliczne. Opisuje ono fale monochromatyczne (o zadanej częstotliwości), ale nie opisuje propagacji. To stwierdzenie wyjaśnimy za chwilę. Istnieją w literaturze liczne próby poprawienia tej własności. Jeden z najbardziej znanych modeli falowych zginania belek skonstruował Timoszenko wprowadzając dodatkowo efekty bezwładności obrotowej elementu pręta i zmianę postaciową jego kształtu. Nie będziemy się dalej zajmowali tym problemem.

W przypadku braku obciążenia ciągłego $p = 0$ powyższe równanie opisuje *giętne drgania własne* belki

$$\frac{\mu}{EI}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0. \tag{297}$$

Zanim przystąpimy do kostrukcji rozwiązania tego równania stosowanego w praktycznych zastosowaniach dokonajmy próby konstrukcji rozwiązania tego równania przy pomocy funkcji opisującej falę biegnącą tego samego typu jak w rozwiązaniu d'Alamberta dla równania falowego. Zakładamy

$$w = We^{i(kx-\omega t)}. \tag{298}$$

Podstawienie w (297) daje

$$\frac{\mu}{EI}(-i\omega)^2 + (ik)^4 = 0,$$

tzn.

$$k^4 = \frac{\mu}{EI}\omega^2. \tag{299}$$

Jest to przykład *równania dyspersyjnego*, które określa *liczbę falową* przy pomocy zadanej częstotliwości ω. Mamy więc

$$k = \pm\sqrt{\pm\omega\sqrt{\frac{\mu}{EI}}} = \left\{ \begin{array}{l} \pm\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}}, \\ \pm i\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}}. \end{array} \right. \tag{300}$$

Przypadek dwóch rzeczywistych rozwiązań prowadzi do propagacji zaburzeń o postaci

$$\begin{aligned} w_r &= W_1 \exp\left[i\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}}\left(x - \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{EI}{\mu}}t\right)\right] + \\ &\quad + W_2 \exp\left[-i\sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}}\left(x + \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{EI}{\mu}}t\right)\right]. \end{aligned} \tag{301}$$

To rozwiązanie dla zadanej częstotliwości nazywa się *falą monochromatyczną*, co oznacza, że ma ona zadaną częstotliwość. Prędkość propagacji zaburzeń (tzw. *prędkość fazowa fali monochromatycznej*) jest następująca (współczynnik przy zmiennej t!)

$$c = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\frac{EI}{\mu}}. \tag{302}$$

Oznacza to, że wzrastająca częstotliwość fali powoduje wzrastającą prędkość propagacji

$$\lim_{\omega\to\infty} c = \infty. \tag{303}$$

Tym samym nie istnieje front fali zaburzenia. Sygnał może się propagować z nieskończenie wielką prędkością. W tym znaczeniu, mimo istnienia fal monochromatycznych, równanie (297) nie jest równaniem falowym.

Druga część rozwiązania dla liczby falowej

$$w_i = \left(W_3 \exp\left[-\sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}} x \right] + W_4 \exp\left[\sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\mu}{EI}} x \right] \right) e^{-i\omega t}, \tag{304}$$

opisuje wyłącznie drgania i nie ma charakteru falowego.

4.3.2 Metoda rozdzielania zmiennych. Funkcje własne

Przystępujemy do poszukiwania rozwiązania równania (297) metodą rozdzielania zmiennych

$$w(x,t) = \Theta(t) X(x). \tag{305}$$

Podstawienie w (297) daje

$$\frac{EI}{\mu} \frac{X^{IV}}{X} = -\frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} = \omega^2, \quad X^{IV} := \frac{d^4 X}{dx^4}, \quad \ddot{\Theta} := \frac{d^2 \Theta}{dt^2}. \tag{306}$$

Podobnie jak w przypadku pręta rozciąganego ω^2 jest dowolną stałą. Te związki prowadzą do następujących rozwiązań

$$\Theta(t) = \Theta_1 \sin \omega t + \Theta_2 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi). \tag{307}$$

Tym samym ω jest częstotliwością kołową drgań. Jednocześnie

$$X^{IV} - \beta^4 X = 0, \quad \beta := \sqrt[4]{\omega^2 \frac{\mu}{EI}}. \tag{308}$$

Podstawiając $X \sim e^{\lambda x}$ otrzymujemy *równanie charakterystyczne*

$$\lambda^4 - \beta^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm\beta, \quad \lambda_{3,4} = \pm i\beta. \tag{309}$$

Rozwiązanie ma więc postać

$$X(x) = C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x + C_3 \sinh \beta x + C_4 \cosh \beta x. \tag{310}$$

Przy pomocy tych wyników znajdziemy teraz rozwiązanie dla dwóch ważnych przypadków szczególnych.

1) Rozpatrzymy najpierw giętne drgania własne belki swobodnie podpartej o długości l. Warunki brzegowe dla tej belki są następujące

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = 0, \quad M(0,t) = 0, \quad M(l,t) = 0. \tag{311}$$

Biorąc pod uwagę związek fizyczny (295) otrzymujemy

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X''(l) = 0. \tag{312}$$

Podstawienie (310) daje dwa układy równań

$$\begin{aligned} C_2 + C_4 &= 0, \\ -C_2 + C_4 &= 0, \end{aligned} \tag{313}$$

z którego wynika

$$C_2 = C_4 = 0, \tag{314}$$

oraz

$$\begin{aligned} C_1 \sin\beta l + C_3 \sinh\beta l &= 0, \\ -C_1 \sin\beta l + C_3 \sinh\beta l &= 0. \end{aligned} \tag{315}$$

Ponieważ jest to liniowy jednorodny układ równań dla stałych C_1, C_3, więc posiada on niezerowe rozwiązania, gdy znika jego wyznacznik, tzn.

$$2\sin\beta l \sinh\beta l = 0. \tag{316}$$

Warunkiem istnienia rozwiązań jest więc związek

$$\sin\beta l = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta l = n\pi, \tag{317}$$

gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Wartości β określone związkiem

$$\beta_n = \frac{n\pi}{l} \tag{318}$$

nazywamy *wartościami własnymi* równania

$$X^{IV} - \beta^4 X = 0, \tag{319}$$

dla powyższych jednorodnych warunków brzegowych. Wynikają stąd *częstotliwości drgań własnych* belki swobodnie podpartej (por. (308))

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \tag{320}$$

Podstawiając (318) w (315) widzimy, że stała C_3 musi być równa zero dla każdego β_n, a stała C_1 jest dowolna. Funkcję X dla tak wybranych β można więc napisać w postaci

$$X_n = C_{1n}\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, \ldots. \tag{321}$$

O stałych C_{1n} mówimy, że są *swobodne*, a funkcje X_n nazywamy *funkcjami własnymi* tego problemu. Są one odpowiednikami wektorów własnych problemu dyskretnego.

2) Rozpatrzmy teraz giętne drgania własne pręta o długości l, utwierdzonego na obu końcach. Warunki brzegowe sprowadzają się do zależności

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(l) = 0. \tag{322}$$

Prowadzą one do zależności

$$
\begin{aligned}
C_2 + C_4 &= 0, \\
C_1 \sin \beta l + C_2 \cos \beta l + C_3 \sinh \beta l + C_4 \cosh \beta l &= 0, \\
C_1 + C_3 &= 0, \\
C_1 \cos \beta l - C_2 \sin \beta l + C_3 \cosh \beta l + C_4 \sinh \beta l &= 0.
\end{aligned}
\tag{323}
$$

Eliminując C_3, C_4 otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
C_1 S_3 (\beta l) + C_2 S_2 (\beta l) &= 0, \\
C_1 S_2 (\beta l) + C_2 S_1 (\beta l) &= 0,
\end{aligned}
\tag{324}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
S_1 (\beta l) &= \frac{1}{2} (\sinh \beta l + \sin \beta l), \\
S_2 (\beta l) &= \frac{1}{2} (\cosh \beta l - \cos \beta l), \\
S_3 (\beta l) &= \frac{1}{2} (\sinh \beta l - \sin \beta l),
\end{aligned}
\tag{325}
$$

są tzw. *funkcjami Kryłowa*. Jeśli zdefiniujemy dodatkowo

$$
S_0 (\beta l) = \frac{1}{2} (\cosh \beta l + \cos \beta l), \quad S_{-1} \equiv S_3,
\tag{326}
$$

to ich pochodne spełniają związek rekurencyjny

$$
\frac{dS_i}{dl} = \beta S_{i-1}.
\tag{327}
$$

Funkcje te są stabelaryzowane (patrz, na przykład, rozdział J. Langera).

Układ równań (324) dla C_1, C_2 posiada nietrywialne rozwiązania, jeśli jego wyznacznik jest równy zero. Mamy więc

$$
S_3 (\beta l) S_1 (\beta l) - S_2^2 (\beta l) = 0.
\tag{328}
$$

W tym prostym przypadku powyższe równanie można również napisać w postaci

$$
\cosh \beta l \cos \beta l - 1 = 0 \quad \text{lub} \ \cos \beta l = \frac{1}{\cosh \beta l}.
\tag{329}
$$

Jego rozwiązania są następujące

$$
\begin{aligned}
\beta_1 l &= 4,730, \quad \beta_2 l = 7,853, \quad \beta_3 l = 10,996, \quad \beta_4 l = 14,137, \\
\beta_n l &\approx \frac{1+2n}{2}\pi \quad \text{dla } n > 4 \ \text{ gdyż wtedy } \frac{1}{\cosh \beta l} \approx 0.
\end{aligned}
\tag{330}
$$

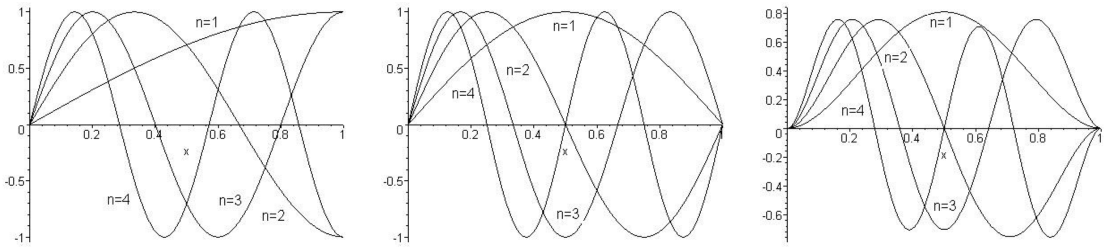
Dla tych rozwiązań możemy wybrać stałą C_{1n} jako swobodną, a pozostałe stałe mają wtedy postać

$$
C_{2n} = -C_{1n} \frac{S_3 (\beta_n l)}{S_2 (\beta_n l)}, \quad C_{3n} = -C_{1n}, \quad C_{4n} = C_{1n} \frac{S_3 (\beta_n l)}{S_2 (\beta_n l)}.
\tag{331}
$$

Funkcje własne dla belki obustronnie utwierdzonej mają więc postać

$$X_n(x) = 2C_{1n}S_3(\beta_n l)\left(\frac{S_3(\beta_n x)}{S_3(\beta_n l)} - \frac{S_2(\beta_n x)}{S_2(\beta_n l)}\right). \tag{332}$$

Postać kilku z tych funkcji własnych jest przedstawiona na Rys. 27.



Rys. 27: *Funkcje własne dla belki swobodnie podpartej rozciąganej* (lewa część rysunku), *swobodnie podpartej zginanej* (środkowa część rysunku) *i obustronnie utwierdzonej* (prawa część rysunku).

Rozpatrując drgania prętów rozciąganych pokazaliśmy, że rozwiązania można tworzyć przy pomocy szeregów Fourier'a. Ta ważna własność wynikała z własności ortogonalności funkcji własnych. Pokażemy, że występuje ona również dla prętów zginanych.

Twierdzenie: Funkcje własne dla prętów zginanych tworzą układ ortogonalny w przedziale $(0.l)$.

Dowód. Równanie (308), opisujące funkcje X_n jest takie samo, jak równanie dla statycznego ugięcia pręta z obciążeniem ciągłym p_n, określonym związkiem

$$EI\frac{d^4X_n}{dx^4} = p_n, \quad p_n = \mu\omega_n^2 X_n. \tag{333}$$

W związku z tym dla różnych n i m możemy zastosować twierdzenie Betti'ego o wzajemności (patrz, na przykład, W. Nowacki, Mechanika Budowli, tom I)

$$\int_0^l p_n X_m dx = \int_0^l p_m X_n dx. \tag{334}$$

Z definicji obciążenia p_n i p_m otrzymujemy więc

$$\left(\omega_n^2 - \omega_m^2\right)\int_0^l X_n X_m dx = 0. \tag{335}$$

Stąd wynika

$$\int_0^l X_n X_m dx = 0 \quad \text{dla } n \neq m, \tag{336}$$

co kończy dowód.

W zastosowaniach korzystnie jest ciąg ortogonalny funkcji własnych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ unormować tak, by dla $n = m$ wynik całkowania był równy jedności. Wystarczy wprowadzić następującą definicję

$$\bar{X}_n = \mu_n X_n, \quad \mu_n = \left(\int_0^1 X_n^2 dx\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{337}$$

Oczywiście, ciąg $\left\{\bar{X}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ jest również ortogonalny, a dodatkowo spełnia związek

$$\int_0^l \bar{X}_n \bar{X}_m dx = \delta_{nm}. \tag{338}$$

Rozważmy przykład funkcji własnych (321) dla zginanej belki swobodnie podpartej. Mamy wtedy

$$X_n = C_{1n} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \Rightarrow \quad \mu_n = \left(C_{1n}^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{1}{C_{1n}}. \tag{339}$$

Unormowane funkcje własne mają postać

$$\bar{X}_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \frac{1}{C_{1n}} C_{1n} \sin \frac{n\pi x}{l} = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \tag{340}$$

Tym samym nie zawierają już one stałej swobodnej.

4.3.3 Drgania wymuszone

Powracamy do analizy równania (296)

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p.$$

Dla zadanego dowolnego obciążenia zewnętrznego $p(x,t)$ wygodnie jest zastosować metodę rozwinięcia w szereg Fourier'a. Metodę tą omawialiśmy już dla pręta rozciąganego, którego funkcje własne mają postać funkcji sinus. Wiemy jednak. że postać funkcji własnych może być różna, gdyż zależy ona od problemu brzegowego. Dlatego też zastosujemy tu uogólnienie, oparte na dowolnym ciągu unormowanych funkcji własnych $\left\{\bar{X}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$. Dla większości rozważań konkretna postać tych funkcji nie jest istotna.

Załóżmy, że obciążenie zewnętrzne można przedstawić w postaci następującego szeregu absolutnie zbieżnego

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_n(t) \bar{X}_n(x). \tag{341}$$

Współczynniki rozwinięcia $\tilde{p}_n(t)$ określimy tak samo, jak w poprzednio analizowanym szeregu Fourier'a. Pomnóżmy powyższy związek przez $\bar{X}_m(x)$ i wykonajmy całkowanie po x. Otrzymujemy

$$\int_0^l \bar{X}_m(x) p(x,t) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_n(t) \int_0^l \bar{X}_m(x) \bar{X}_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_n(t) \delta_{nm},$$

tzn.

$$\tilde{p}_n(t) = \int_0^l p(x,t) \bar{X}_n(x) dx. \tag{342}$$

Jest to wzór na współczynniki Fourier'a, analogiczny do (257). Przy jego wyprowadzeniu skorzystaliśmy z jednostajnej zbieżności. Jego budowa jest prostsza, niż (257), gdyż funkcje własne są unormowane.

Rozwiązania równania dla linii ugięcia poszukujemy w postaci analogicznego szeregu

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n(t)\, \bar{X}_n(x). \tag{343}$$

Po podstawieniu do równania (296) otrzymujemy

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n(t)\, \bar{X}_n^{IV}(x) + \mu \sum_{n=1}^{\infty} (\ddot{\tilde{w}}_n(t)) \bar{X}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_n(t)\, \bar{X}_n(x), \quad (\ddot{\tilde{w}}_n(t)) := \frac{d^2 \tilde{w}_n}{dt^2}(t). \tag{344}$$

Ponieważ funkcje własne są ortogonalne, to równanie to musi być spełnione oddzielnie dla każdego n

$$EI \tilde{w}_n(t)\, \bar{X}_n^{IV}(x) + \left[\mu (\ddot{\tilde{w}}_n(t)) - \tilde{p}_n(t) \right] \bar{X}_n(x) = 0, \quad n = 1, \ldots. \tag{345}$$

W każdym z tych równań możemy rozdzielić zmienne

$$\frac{EI}{\mu} \frac{\bar{X}_n^{IV}}{\bar{X}_n}(x) = -\frac{(\ddot{\tilde{w}}_n) - \frac{1}{\mu}\tilde{p}_n}{\tilde{w}_n}(t) = \omega_n^2, \tag{346}$$

gdzie, oczywiście, częstotliwości ω_n określa się tak, jak dla równania $(306)_1$. Do wyznaczenia współczynników $\tilde{w}_n$ otrzymujemy równania

$$(\ddot{\tilde{w}}_n) + \omega_n^2 \tilde{w}_n = \frac{1}{\mu} \tilde{p}_n, \quad n = 1, \ldots. \tag{347}$$

Rozwiązanie jest sumą całki ogólnej równania jednorodnego i całki szczególnej równania niejednorodnego i ma postać[2]

$$\tilde{w}_n(t) = A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t + \frac{1}{\mu \omega_n} \int_0^t \tilde{p}_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau)\, d\tau. \tag{348}$$

Całka po prawej stronie, opisująca wpływ dowolnego obciążenia zewnętrznego jest szczególnym przypadkiem tzw. całki Duhamel'a. Ogólny przypadek dotyczy równań typu (347) zawierających wpływ tłumienia w postaci $(c/\mu)\, \dot{\tilde{w}}$. Wtedy całkowy wkład ma postać

$$\frac{1}{\mu \omega_n'} \int_0^t \tilde{p}_n(\tau)\, e^{-\alpha \omega_n (t-\tau)} \sin \omega_n' (t - \tau)\, d\tau, \quad \alpha = \frac{c}{2\mu\omega_n}, \quad \omega_n' = \omega_n \sqrt{1 - \alpha^2}, \tag{349}$$

[2] zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{w}_n}{dt} &= A_n \omega_n \cos \omega_n t - B_n \omega_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\mu} \int_0^t \tilde{p}_n(\tau) \cos \omega_n (t - \tau)\, d\tau, \\ \frac{d^2 \tilde{w}_n}{dt^2} &= -A_n \omega_n^2 \sin \omega_n t - B_n \omega_n^2 \cos \omega_n t + \frac{1}{\mu} \tilde{p}_n - \frac{\omega_n}{\mu} \int_0^t \tilde{p}_n(\tau) \sin \omega_n (t - \tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

(por. Paragraf 2.2), ω_n jest częstotliwością dla $c = 0$. Wyprowadzenie tego związku polega na zastosowaniu zasady superpozycji do rozwiązań typu impulsowego, tzn dla siły zewnętrznej proporcjonalnej do $\delta(t)$, gdzie $\delta(t)$ jest deltą Diraca.

Stałe A_n, B_n wyznaczamy z warunków początkowych (por. (251))

$$w(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = g(x). \tag{350}$$

Warunki te przedstawiamy w postaci szeregów Fourier'a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\theta} \tilde{f}_n \bar{X}_n(x), \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\theta} \tilde{g}_n \bar{X}_n(x), \tag{351}$$

gdzie współczynniki rozwinięcia są zadane wzorami Fourier'a

$$\tilde{f}_n = \int_0^l f(x)\bar{X}_n(x)\,dx, \quad \tilde{g}_n = \int_0^l g(x)\bar{X}_n(x)\,dx. \tag{352}$$

Jednocześnie lewa strona związków (350) ma postać

$$\begin{aligned} w(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{w}_n(0)\bar{X}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\bar{X}_n(x), \qquad (353)\\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial \tilde{w}_n}{\partial t}(0)\bar{X}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n\bar{X}_n(x). \end{aligned}$$

Porównując (351) i (353) otrzymujemy ostatecznie

$$B_n = \tilde{f}_n, \quad A_n = \frac{\tilde{g}_n}{\omega_n}. \tag{354}$$

Jako praktycznie ważny przykład zastosowania powyższej metody rozpatrzymy problem *rezonansu.* Rozważmy belkę obciążoną ciągłym obciążeniem harmonicznym

$$p(x,t) = p^0(x)\sin pt. \tag{355}$$

Musimy najpierw przedstawić to obciążenie w postaci szeregu Fourier'a. Mamy

$$\begin{aligned} p(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{p}_n(t)\bar{X}_n(x), \quad \tilde{p}_n(t) = \int_0^l p(x,t)\bar{X}_n(x)\,dx = \\ &= \left[\int_0^l p^0(x)\bar{X}_n(x)\right]\sin pt = \tilde{p}_n^0 \sin pt. \qquad (356) \end{aligned}$$

Zbadajmy teraz wyrażenie, występujące we wzorze (348) na ugięcie $w(x,t)$. Musimy wykonać całkowanie

$$\int_0^t \tilde{p}_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau = \tilde{p}_n^0 \int_0^l \sin p\tau \sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau =$$

$$
\begin{aligned}
&= \tilde{p}_n^0 \int_0^l \sin p\tau \left[\sin \omega_n t \cos \omega_n \tau - \cos \omega_n t \sin \omega_n \tau\right] d\tau = \\
&= \tilde{p}_n^0 \left\{ \sin \omega_n t \left[\frac{1-\cos (p+\omega_n) t}{2(p+\omega_n)} + \frac{1-\cos (p-\omega_n) t}{2(p-\omega_n)} \right] + \right. \\
&\left. + \cos \omega_n t \left[\frac{\sin (p+\omega_n) t}{2(p+\omega_n)} - \frac{\sin (p-\omega_n) t}{2(p-\omega_n)} \right] \right\},
\end{aligned}
\tag{357}
$$

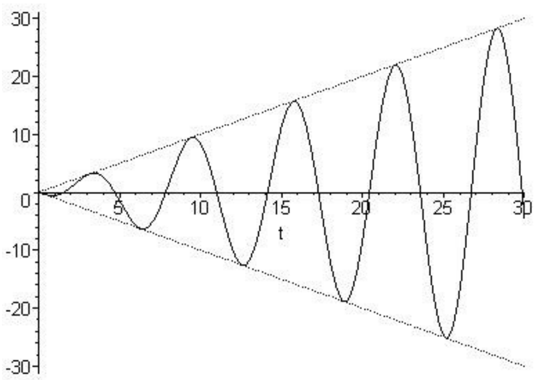
gdzie pogrupowano odpowiednio wyrazy pocałkowe.[3]. Istotne jest zachowanie się tego wyrażenia, gdy częstotliwość drgań zewnętrznych p jest równa jednej z częstotliwości drgań własnych, powiedzmy ω_m. Przejście do takiej granicy wymaga zbadania wyrazów powyższego wzoru, które zwierają różnicę $p-\omega_m$. Mianowicie

$$
\lim_{p\to\omega_m} \left[\sin \omega_m t \frac{1-\cos (p-\omega_m) t}{2(p-\omega_m)} - \cos \omega_m t \frac{\sin (p-\omega_m) t}{2(p-\omega_m)} \right] = -\frac{t}{2} \cos \omega_m t, \tag{358}
$$

gdyż

$$
\lim_{p\to\omega_m} \frac{\sin (p-\omega_m) t}{(p-\omega_m) t} = 1, \quad \lim_{p\to\omega_m} \frac{1-\cos (p-\omega_m) t}{(p-\omega_m) t} = 0. \tag{359}
$$

Zachowanie się w czasie tego wkładu do ugięcia jest pokazane na Rys. 28.



[3]W celu zcałkowania uzupełniamy funkcje podcałkowe do funkcji sumy i różnicy kątów:
a)

$$
\begin{aligned}
\int_0^t \sin p\tau \cos \omega_n \tau d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t \left(2 \sin p\tau \cos \omega_n \tau \pm \cos p\tau \sin \omega_n \tau\right) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \left(\sin (p+\omega_n) \tau + \sin (p-\omega_n) \tau\right) d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{1-\cos (p+\omega_n) t}{p+\omega_n} + \frac{1-\cos (p-\omega_n) t}{p-\omega_n} \right].
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
-\int_0^t \sin p\tau \sin \omega_n \tau d\tau &= \frac{1}{2} \int_0^t \left[\pm \cos p\tau \cos \omega_n \tau - \sin p\tau \sin \omega_n \tau\right] d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \left[\cos (p+\omega_n) \tau - \cos (p-\omega_n) \tau\right] d\tau = \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin (p+\omega_n) t}{p+\omega_n} - \frac{\sin (p-\omega_n) t}{p-\omega_n} \right].
\end{aligned}
$$

Rys. 28: *Wkład rezonansowy do rozwiązania problemu obciążenia harmonicznego*

Oznacza to, że w przypadku $p = \omega_m$ ugięcie rośnie nieograniczenie w czasie – mamy do czynienia z rezonansem.

Rezonans pojawia się także dla innych obciążeń periodycznych. Na przykład siła ruchoma, poruszająca się po belce z prędkością $v_{kr} = l\omega_n/n\pi$ prowadzi do rezonansu. Pojawia się on również dla periodycznych sił skupionych takich, jak obciążenia młotem o okresie $T = 2\pi/\omega_n$, gdzie ω_n jest jedną z częstotliwości drgań własnych.

4.3.4 Podsumowanie

Rozwiązania równania drgań belki (297), tzn. jednorodnego równania, opisującego drgania własne

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0, \tag{360}$$

poszukujemy przy pomocy rozdzielenia zmiennych. W wyniku

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n(t) X_n(x), \tag{361}$$

$$\ddot{\Theta}_n + \omega_n^2\Theta_n = 0, \quad X_n^{IV} - \beta_n^4 X_n = 0, \quad \beta_n = \sqrt[4]{\omega_n^2\frac{\mu}{EI}}. \tag{362}$$

W tych równaniach ω_n jest częstotliwością drgań własnych, a β_n wyznacza się z powyższego związku. Wartości ω_n sa zależne od warunków brzegowych (jednorodnych!) i są rozwiązaniami równania charakterystycznego (zerowanie wyznacznika). Rozwiązania $X_n(x)$ związane z wybranymi częstotliwościami ω_n sa ortogonalnymi funkcjami własnymi i ich postać również zależy od warunków brzegowych. Unormowane funkcje własne

$$\bar{X}_n(x) = \frac{X_n(x)}{\sqrt{\int_0^l X_n^2(y)\,dy}}, \quad \int_0^1 \bar{X}_n(x)\bar{X}_m(x) = \delta_{nm}, \tag{363}$$

upraszczają rozwinięcia w szereg dowolnych funkcji względem funkcji własnych

$$p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{p}_n(t)\bar{X}_n(x), \quad \bar{p}_n(t) = \int_0^l p(x,t)\bar{X}_n(x)\,dx. \tag{364}$$

W przypadku obciążeń zewnętrznych mamy

$$\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = p. \tag{365}$$

Wtedy rozwiązanie ma postać

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_n(t)\bar{X}_n(x), \tag{366}$$

gdzie $\bar{X}_n$ są unormowanymi funkcjami własnymi dla zadanych warunków brzegowych, oraz

$$\bar{w}_n(t) = A_n\sin\omega_n t + B_n\cos\omega_n t + \frac{1}{\mu\omega_n}\int_0^t \bar{p}_n(t)\sin\omega_n(t-\tau)\,d\tau. \tag{367}$$

Wyrażenie całkowe w powyższym wzorze – całka szczególna równania niejednorodnego – nazywana jest całką Duhamela.

4.3.5 Wzory transformacyjne

Rozpatrzymy teraz problem konstrukcji wzorów transformacyjnych, analogicznych do wzorów statyki i cytowanych w Tabeli Paragrafu 3.4.2. Badamy pręt obustronnie zamocowany drgający harmoniczne z częstotliwością ω, tzn. $\beta = \sqrt{\omega}\sqrt[4]{\mu/EI}$. To oznacza, że

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \sin(\omega t+\varphi) X(x), \\
M &= M^0 \sin(\omega t+\varphi), \quad M^0(x) = -EI\frac{d^2X}{dx^2}, \\
T &= T^0 \sin(\omega t+\varphi), \quad T^0(x) = -EI\frac{d^3X}{dx^3}.
\end{aligned} \tag{368}
$$

Wprowadźmy oznaczenia (por. Rys. do Tabeli w 3.4.2, w którym wszystkie wielkości należy zastąpić wielkościami z indeksem 0)

$$
\begin{aligned}
w_i^0 &= X(x=0), \quad w_k^0 = X(x=l), \\
\varphi_i^0 &= \frac{dX}{dx}(x=0), \quad \varphi_k^0 = \frac{dX}{dx}(x=l),
\end{aligned} \tag{369}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{ik}^0 &= M^0(x=0), \quad M_{ki}^0 = M^0(x=l), \\
T_{ik}^0 &= T^0(x=0), \quad T_{ki}^0 = T^0(x=l).
\end{aligned} \tag{370}
$$

W rozwiązaniu (310) trzeba stałe $C_1,\ldots,C_4$ wyznaczyć z warunków brzegowych (369), (370). Po prostych obliczeniach otrzymujemy następujące *wzory transformacyjne dla momentów zginających*

$$
\begin{aligned}
M_{ik}^0 &= \frac{EI}{l}\left[c(\beta l)\varphi_i^0 + s(\beta l)\varphi_k^0 + t(\beta l)\frac{w_i^0}{l} - r(\beta l)\frac{w_k^0}{l}\right], \\
M_{ki}^0 &= \frac{EI}{l}\left[s(\beta l)\varphi_i^0 + c(\beta l)\varphi_k^0 + r(\beta l)\frac{w_i^0}{l} - t(\beta l)\frac{w_k^0}{l}\right],
\end{aligned} \tag{371}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
c(\beta l) &= \beta l\frac{\cosh\beta l\sin\beta l - \sinh\beta l\cos\beta l}{1-\cosh\beta l\cos\beta l}, \\
s(\beta l) &= \beta l\frac{\sinh\beta l - \sin\beta l}{1-\cosh\beta l\cos\beta l}, \\
r(\beta l) &= (\beta l)^2\frac{\cosh\beta l - \cos\beta l}{1-\cosh\beta l\cos\beta l}, \\
t(\beta l) &= (\beta l)^2\frac{\sinh\beta l\sin\beta l}{1-\cosh\beta l\cos\beta l}, \quad \beta l = \sqrt[4]{\frac{\mu\omega^2 l^4}{EI}}.
\end{aligned} \tag{372}
$$

Dla sił tnących mamy odpowiednio

$$
\begin{aligned}
T_{ik}^{0} &= -\frac{EI}{l^2}\left[t(\beta l)\,\varphi_i^0 + r(\beta l)\,\varphi_k^0 + m(\beta l)\,\frac{w_i^0}{l} - n(\beta l)\,\frac{w_k^0}{l}\right], \\
T_{ki}^{0} &= -\frac{EI}{l^2}\left[r(\beta l)\,\varphi_i^0 + t(\beta l)\,\varphi_k^0 + n(\beta l)\,\frac{w_i^0}{l} - m(\beta l)\,\frac{w_k^0}{l}\right],
\end{aligned}
\tag{373}
$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
m(\beta l) &= (\beta l)^3\,\frac{\sinh\beta l\cos\beta l + \cosh\beta l\sin\beta l}{1-\cosh\beta l\cos\beta l}, \\
n(\beta l) &= (\beta l)^3\,\frac{\sinh\beta l + \sin\beta l}{1-\cosh\beta l\cos\beta l}.
\end{aligned}
\tag{374}
$$

Funkcje te są stabelaryzowane (patrz, na przykład, W. Nowacki, Mechanika Budowli, tom II). W granicy $\omega \to 0$, tzn. $\beta \to 0$ otrzymujemy

$$
c(0) = 4, \quad s(0) = 2, \quad r(0) = t(0) = 6, \quad n(0) = m(0) = 12. \tag{375}
$$

Są to wartości, które występują we wzorach transformacyjnych statyki.

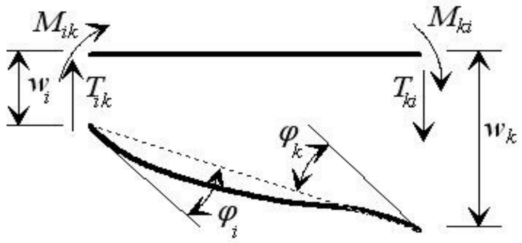
Wzory dla innych przypadków podparcia można otrzymać nakładając odpowiednie więzy w powyższych wzorach. Na przykład, dla belki swobodnie podpartej dla $x = 0$ i utwierdzonej dla $x = l$, trzeba obliczyć φ_i^0 z warunku $M_{ik}^0 = 0$, a następnie podstawić w powyższych związkach. Otrzymujemy wtedy

$$
\begin{aligned}
M_{ik}^{0} &= 0, \\
M_{ki}^{0} &= \frac{EI}{l}\left[\bar{c}(\beta l)\,\varphi_k^0 + \bar{r}(\beta l)\,\frac{w_i^0}{l} - \bar{t}(\beta l)\,\frac{w_k^0}{l}\right], \\
T_{ik}^{0} &= -\frac{EI}{l^2}\left[\bar{r}(\beta l)\,\varphi_k^0 + \bar{m}(\beta l)\,\frac{w_i^0}{l} - \bar{n}(\beta l)\,\frac{w_k^0}{l}\right], \\
T_{ki}^{0} &= -\frac{EI}{l^2}\left[\bar{t}(\beta l)\,\varphi_k^0 + \bar{n}(\beta l)\,\frac{w_i^0}{l} - \bar{p}(\beta l)\,\frac{w_k^0}{l}\right],
\end{aligned}
\tag{376}
$$

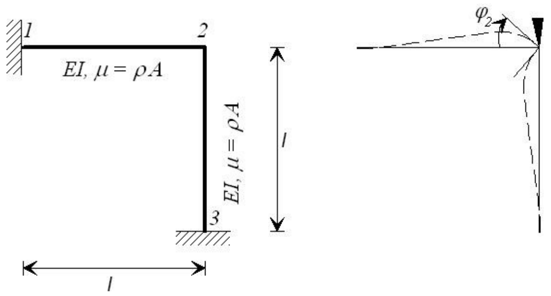
gdzie

$$
\begin{aligned}
\bar{c}(\beta l) &= \beta l\,\frac{\sinh\beta l\sin\beta l}{\cosh\beta l\sin\beta l - \sinh\beta l\cos\beta l}, \\
\bar{t}(\beta l) &= (\beta l)^2\,\frac{\cosh\beta l\sin\beta l + \sinh\beta l\cos\beta l}{\cosh\beta l\sin\beta l - \sinh\beta l\cos\beta l}, \\
\bar{r}(\beta l) &= (\beta l)^2\,\frac{\sinh\beta l + \sin\beta l}{\cosh\beta l\sin\beta l - \sinh\beta l\cos\beta l}, \\
\bar{n}(\beta l) &= (\beta l)^3\,\frac{\cosh\beta l + \cos\beta l}{\cosh\beta l\sin\beta l - \sinh\beta l\cos\beta l}, \\
\bar{m}(\beta l) &= (\beta l)^3\,\frac{1 + \cosh\beta l\cos\beta l}{\cosh\beta l\sin\beta l - \sinh\beta l\cos\beta l}, \\
\bar{p}(\beta l) &= 2\,(\beta l)^3\,\frac{\cosh\beta l\cos\beta l}{\cosh\beta l\sin\beta l - \sinh\beta l\cos\beta l}.
\end{aligned}
\tag{377}
$$

Oznaczenia:



Powyższe wzory transformacyjne zastosujemy do rozwiązania prostego przykładu. Poszukujemy częstotliwości drgań własnych układu, przedstawionego na Rys. 29.



Rys. 29: *Przykład do zastosowania wzorów transformacyjnych*

Pomijamy wpływ ściskania i rozciągania. Wtedy warunek równowagi momentów dla węzła 2 daje

$$M_{21}^0 + M_{23}^0 = 0, \quad M_{21}^0 = M_{23}^0 = \frac{EI}{l} c(\beta l)\, \varphi_2^0. \tag{378}$$

Wykorzystaliśmy tu wzory (371). Mamy więc

$$\beta l \frac{\cosh \beta l \sin \beta l - \sinh \beta l \cos \beta l}{1 - \cosh \beta l \cos \beta l} = 0 \quad \Longrightarrow \sin \beta l = \cos \beta l \tanh \beta l. \tag{379}$$

Rozwiązania numeryczne tego równania transcendentalnego (przestępnego) są następujące

$$\beta_1 l = 3.9266, \quad \beta_2 l = 7.0686, \quad \beta_3 l = 10.2102, \quad \beta_n l \approx \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi \ \text{ dla } \ n > 2. \tag{380}$$

Tym samym częstości drgań mają wartości

$$\begin{aligned} \omega &= (\beta l)^2 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}, \\ \omega_1 &= 15.4182 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}, \quad \omega_2 = 49,9651 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}, \quad \omega_3 = 104,2481 \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}, \ldots. \end{aligned} \tag{381}$$

Na przykład, dla następujących danych

$$\begin{aligned} EI &= 5 \times 10^4 \ \text{Nm}^2, \quad l = 5 \ \text{m}, \quad A = 0,003 \ \text{m}^2, \quad \rho = 7850 \ \text{kg/m}^3, \\ \mu &= 23,55 \ \frac{\text{kg}}{\text{m}}, \quad \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}} = 5,8284 \ \frac{1}{\text{s}}, \end{aligned} \tag{382}$$

trzy pierwsze częstotliwości drgań własnych są następujące

$$\omega_1 = 89,8634 \ \ 1/\mathrm{s}, \quad \omega_2 = 291,2166 \ \ 1/\mathrm{s}, \quad \omega_3 = 607,5996 \ \ 1/\mathrm{s}, \tag{383}$$

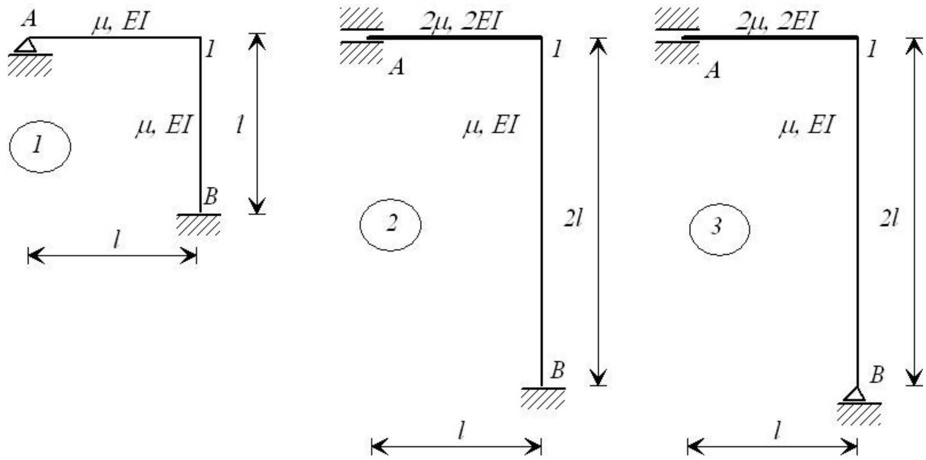
tzn.

$$f_1 = 14,3022 \ \ [\mathrm{Hz}]\,, \quad f_2 = 46,3486 \ \ [\mathrm{Hz}]\,, \quad f_3 = 96,7024 \ \ [\mathrm{Hz}] \ldots . \tag{384}$$

W trzech kolejnych przykładach, przedstawionych na Rys. 29a, układy są przesuwne. Wszystkie trzy posiadają dwa dynamiczne stopnie swobody: obrót $\varphi_1 = \sin(\omega t + \varphi)\,\varphi_1^0$ i przesunięcie poziome $w_1 = \sin(\omega t + \varphi)\,w_1^0$ węzła 1. Równania dla tych wielkości wynikają z warunków dynamicznej równowagi węzła 1 i są one dla wszystkich trzech zadań identyczne

$$M_{1A}^0 + M_{1B}^0 = 0, \quad T_{1B}^0 + \mu l \omega^2 w_1^0 = 0. \tag{385}$$

Ostatni człon w drugim wzorze wynika z siły bezwładności pręta poziomego: $\mu l \ddot{w}_1$.



Rys. 29a: *Przykłady układów przesuwnych*

Zadania różnią się sposobami podparcia i długością słupów, a więc i wzorami transformacyjnymi. Mamy odpowiednio

1) Dla pręta poziomego stosujemy wzory transformacyjne dla podparcia przegubowego, a dla pionowego z obustronnym zamocowaniem

$$\begin{aligned} M_{1A}^0 &= \frac{EI}{l}\bar{c}(\beta l)\,\varphi_1^0, \quad M_{1B}^0 = \frac{EI}{l}\left[c(\beta l)\,\varphi_1^0 + t(\beta l)\,\frac{w_1^0}{l}\right], \\ T_{1B}^0 &= -\frac{EI}{l^2}\left[t(\beta l)\,\varphi_1^0 + m(\beta l)\,\frac{w_1^0}{2l}\right], \quad \beta l = \sqrt[4]{\omega^2 \frac{\mu l^4}{EI}}. \end{aligned} \tag{386}$$

W tych wzorach w_1 jest przesunięciem poziomym węzła 1, a φ_1 jego obrotem. A więc warunki równowagi mają postać

$$\begin{aligned} (\bar{c} + c)\,\varphi_1^0 + t\frac{w_1^0}{l} &= 0, \\ -\frac{EI}{l^2}\left(t\varphi_1^0 + m\frac{w_1^0}{l}\right) + \mu l w_1^0 \omega^2 &= 0. \end{aligned} \tag{387}$$

Drugi wyraz w drugim warunku wynika z faktu, że masa pręta poziomego μl wywołuje siłę bezwładności $\mu l \ddot{w}_1$ podobną do masy skupionej w ruchu poziomym tego pręta. Warunki te można napisać w postaci

$$\begin{aligned} (\bar{c}+c)\,\varphi_1^0 + t\frac{w_1^0}{l} &= 0, \\ t\varphi_1^0 - \left((\beta l)^4 - m\right)\frac{w_1^0}{l} &= 0, \end{aligned} \tag{388}$$

Zerowanie się wyznacznika tego układu

$$(\bar{c}+c)\left((\beta l)^4 - m\right) + t^2 = 0, \tag{389}$$

prowadzi do równania przestępnego dla β, a więc i dla częstotliwości ω. Numeryczne rozwiązanie tego problemu daje następujące dwie pierwsze wartości

$$\begin{aligned} \beta_1 l &= 1.4362 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = 2,0627\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}, \\ \beta_2 l &= 3.5031 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = 12,2717\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}, \\ \beta_3 l &= 4.4766 \quad \Rightarrow \quad \omega_3 = 20.0399\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}, \ldots \end{aligned} \tag{390}$$

Dla danych z poprzedniego zadania otrzymujemy

$$\omega_1 = 12.0222 \;\; 1/\mathrm{s}, \quad \omega_2 = 71,5244 \;\; 1/\mathrm{s}, \quad \omega_3 = 116,8006 \;\; 1/\mathrm{s}, \tag{391}$$

tzn.

$$f_1 = 1,9134 \;\; [\mathrm{Hz}], \quad f_2 = 11,3835 \;\; [\mathrm{Hz}], \quad f_3 = 18,5894 \;\; [\mathrm{Hz}] \ldots. \tag{392}$$

Porównując wynik (392) z wynikiem (384) widzimy, że usztywnienie układu przez zstąpienie przegubu przesuwnego zamocowaniem, powoduje znaczny wzrost częstotliwości drgań własnych (wysokie strojenie!), co jest zwykle praktycznie pożądane.

2) Dla obu prętów stosujemy wzory transformacyjne dla obustronnego zamocowania

$$\begin{aligned} M_{1A}^0 &= \frac{2EI}{l}c(\beta l)\,\varphi_1^0, \quad M_{1B}^0 = \frac{EI}{2l}\left[c(2\beta l)\,\varphi_1^0 + t(2\beta l)\,\frac{w_1^0}{2l}\right], \\ T_{1B}^0 &= -\frac{EI}{(2l)^2}\left[t(2\beta l)\,\varphi_1^0 + m(2\beta l)\,\frac{w_1^0}{2l}\right], \quad \beta = \sqrt[4]{\omega^2\frac{2\mu}{2EI}} = \sqrt[4]{\omega^2\frac{\mu}{EI}}. \end{aligned} \tag{393}$$

3) Dla pręta poziomego stosujemy wzory transformacyjne dla obustronnego zamocowania, a dla pionowego z podparciem przegubowym

$$\begin{aligned} M_{1A}^0 &= \frac{2EI}{l}c(\beta l)\,\varphi_1^0, \quad M_{1B}^0 = \frac{EI}{2l}\left[\bar{c}(2\beta l)\,\varphi_1^0 + \bar{t}(2\beta l)\,\frac{w_1^0}{2l}\right], \\ T_{1B}^0 &= -\frac{EI}{(2l)^2}\left[\bar{t}(2\beta l)\,\varphi_1^0 + \bar{p}(2\beta l)\,\frac{w_1^0}{2l}\right], \quad \beta = \sqrt[4]{\omega^2\frac{2\mu}{2EI}} = \sqrt[4]{\omega^2\frac{\mu}{EI}}. \end{aligned} \tag{394}$$

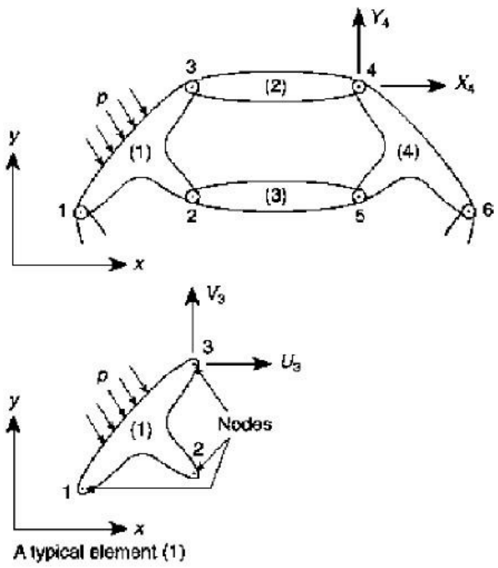
Określenie częstotliwości w tych problemach pozostawiamy czytelnikowi.

5 Metoda elementów skończonych

5.1 Wprowadzenie

Obliczanie skomplikowanych układów sprowadza się do przybliżonego rozwiązywania równań. Metody przybliżeń można ideowo podzielić na dwie grupy: metody matematyczne i metody inżynierskie. Do pierwszej należą metody rozwinięć asymptotycznych, metody różnic skończonych, aproksymacje wielomianowe, rozwinięcia w szeregi. Do drugiej grupy należy przede wszystkim zaliczyć metodę elementów skończonych i metodę skończonych elementów objętościowych. Pośrednia między obu grupami jest metoda elementów brzegowych, która stanowi kombinację metody analitycznej i metody elementów skończonych. Początki metody elementów skończonych powstały w oparciu o mechanikę budowli (Argyris, Zienkiewicz), ale w okresie późniejszym została ona rozszerzona na praktycznie dowolne układy równań pola.

Zasada ideowa metody elementów skończonych jest przedstawiona na Rys. 30. Rysunek ten przedstawia przykład konstrukcji złożonej z czterech płaskich elementów, połączonych przegubowo w węzłach od 1 do 6. Jeśli znane jest rozwiązanie problemu zależności naprężeń i odkształceń w każdym z tych czterech elementów (teoretycznie z teorii sprężystości, eksperymentalnie, lub w jakikolwiek inny sposób), to siły działające w węzłach są znane, jeśli znane są przemieszczenia węzłów i zadane jest obciążenie elementów i stan ich wstępnych deformacji (np. na skutek błędów montażu, obciążeń termicznych, itp.).



Rys. 30: *Schemat ideowy metody elementów skończonych*

Niech współrzędne sił i przemieszczeń będą oznaczone przez, odpowiednio, (U, V) i (u, v). Dla elementu 1 mamy więc układ sił

$$\mathbf{Q}^1 = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{Q}_1^1 \\ \mathbf{Q}_2^1 \\ \mathbf{Q}_3^1 \end{array} \right\}, \quad \mathbf{Q}_1^1 = \left\{ \begin{array}{c} U_1 \\ V_1 \end{array} \right\}, \quad \text{itd.,} \tag{395}$$

i układ przemieszczeń

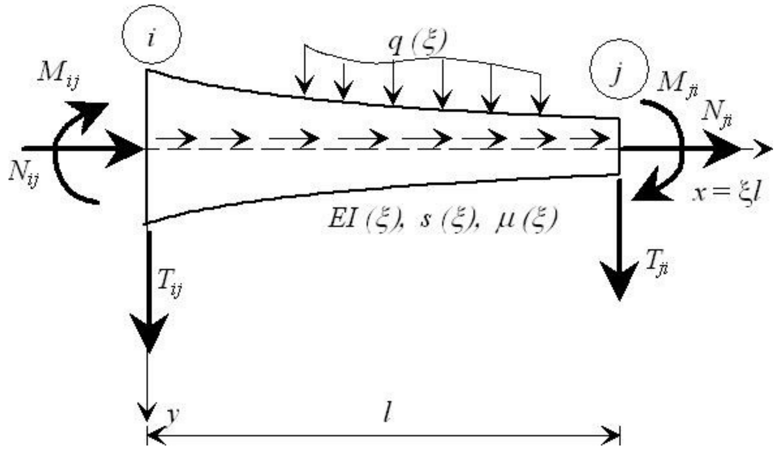
$$\mathbf{q}^1 = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^1 \\ \mathbf{q}_2^1 \\ \mathbf{q}_3^1 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1^1 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{Bmatrix}, \quad \text{itd.} \tag{396}$$

Zakładając, że materiał jest sprężysty, relacja między tymi wielkościami musi mieć postać

$$\mathbf{Q}^1 = \mathbf{K}^1 \mathbf{q}^1 + \mathbf{f}_P^1 + \mathbf{f}_{\varepsilon_w}^1, \tag{397}$$

Wielkość $\mathbf{f}_P^1$ określa siły węzłowe, konieczne do utrzymania elementu 1 w równowadze z siłami zewnętrznymi, a $\mathbf{f}_{\varepsilon_w}^1$ jest siłą, wynikającą z wstępnych deformacji. Macierz $\mathbf{K}^1$ jest macierzą sztywności. Struktura tego związku jest, oczywiście, taka sama, jak związków dla układów dyskretnych, które omawialiśmy na początku tego kursu.

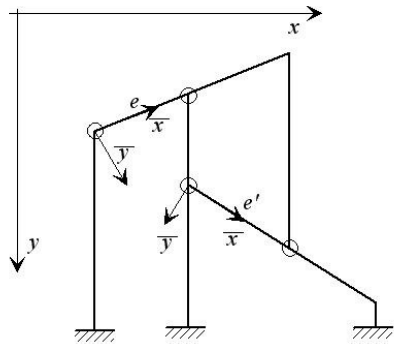
W zastosowaniu powyższej metody dyskretyzacji do konstrukcji prętowych wybór węzłów jest w zasadzie dowolny. Może się on pokrywać z rzeczywistymi węzłami konstrukcji, ale dla podwyższenia dokładności obliczeń może być to zbiór znacznie większy. Zasadniczo dla konstrukcji prętowych wybiera się prostoliniowe elementy prętowe. Siły działające na element przyjmuje się za dodatnie w zwykłym znaczeniu współrzędnych wektora w wybranym lokalnym układzie współrzędnych (por. Rys. 31). Charakterystyka każdego elementu jest zadana jako funkcja lokalnej współrzędnej $\xi = x/l$, gdzie l jest długością elementu.



Rys. 31: *Lokalny układ odniesienia i oznaczenia dodatnich wielkości dla elementu prętowego*

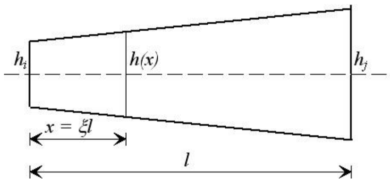
5.2 Równania ruchu elementu prętowego

Konstrukcję równań ruchu dla wybranego elementu e przeprowadzimy w lokalnym układzie współrzędnych $(\bar{x}, \bar{y})$, a następnie przejdziemy do opisu w układzie globalnym (x, y) (por. Rys. 32).



Rys. 32: *Szkic loklanych i globalnych układów współrzędnych dla dowolnego układu prętowego*

A) **Charakterystyka geometryczna** pręta o zmiennym przekroju. Zakładamy, że szerokość przekroju pręta jest stała: $b = const.$



Rys: 33: *Pręt o liniowo zmiennej wysokości*

Wtedy wysokość jest funkcją zmiennych lokalnych. W przypadku zmienności liniowej mamy

$$h(\bar{x}) = h_i (1 - \xi) + h_j \xi = h_i + (h_j - h_i)\, \xi = h_i \left[1 + \alpha_{ij} \xi\right], \quad \xi = \frac{\bar{x}}{l}, \quad \alpha_{ij} = \frac{h_i}{h_j} - 1. \tag{398}$$

Powierzchnia przekroju i moment bezwładności dla przekroju prostokątnego zmieniają się wtedy następująco

$$\begin{aligned} A(\bar{x}) &= bh = A_i \left[1 + \alpha_{ij}\xi\right], \quad I(\bar{x}) = \frac{bh^3}{12} = I_i \left[1 + \alpha_{ij}\xi\right]^3 = \\ &= I_i \left(1 + 3\alpha_{ij}\xi + 3\alpha_{ij}^2\xi^2 + \alpha_{ij}^3\xi^3\right). \end{aligned} \tag{399}$$

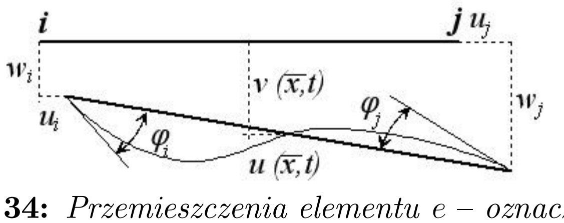
Zmiany smukłości są nawet w tym liniowym przypadku bardziej skomplikowane

$$s = l\sqrt{\frac{A}{I}} = \frac{s_i}{1 + \alpha_{ij}\xi}, \quad s_i = \sqrt{12}\frac{l}{h_i}. \tag{400}$$

Gęstość masy na jednostkę długości pręta zmienia się w tym przypadku następująco

$$\mu(\bar{x}) = \mu_i \left(1 + \alpha_{ij}\xi\right). \tag{401}$$

B) **Charakterystyka przemieszczeń** elementu prętowego e. Na Rys. 34 przedstawiono oznaczenia wielkości, charakteryzujących element prętowy po deformacji.



Rys. 34: *Przemieszczenia elementu e – oznaczenia*

Podstawowym krokiem metody elementów skończonych jest przyjęcie sposobu przybliżenia wartości funkcji przez ich wartości brzegowe. W przypadku elementu prętowego dotyczy to przedstawienia przemieszczeń $v(\bar{x},t)$ i $u(\bar{x},t)$ poprzez $w_i, w_j, \varphi_i, \varphi_j, u_i, u_j$. Przyjmujemy następujące założenie

$$\begin{aligned} v(\bar{x},t) &= N_2(\xi)\, w_i(t) + N_3(\xi)\, \varphi_i(t) + N_5(\xi)\, w_j(t) + N_6(\xi)\, \varphi_j(t), \\ u(\bar{x},t) &= N_1(\xi)\, u_i(t) + N_4(\xi)\, u_j(t), \end{aligned} \tag{402}$$

gdzie *funkcje aproksymujące (funkcje kształtu)* $N_1, \ldots, N_6$ są określone wielomianami najniższego stopnia, spełniającymi statyczne równanie ugięcia. Dla poszczególnych funkcji mamy wtedy

$$N_2: \quad v^{IV}(\xi) = 0, \quad v(0) = 1, \quad v'(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad v'(1) = 0, \tag{403}$$

co daje

$$N_2(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3. \tag{404}$$

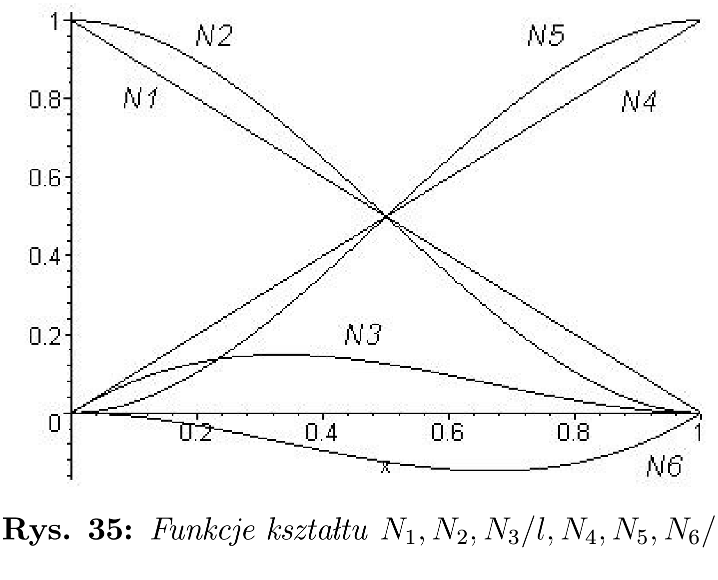
Dla pozostałych funkcji mamy analogicznie

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &: \quad u''(\xi) = 0, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1(\xi) = 1 - \xi, \\ N_3(\xi) &: \quad v^{IV}(\xi) = 0, \quad v(0) = 0, \quad v'(0) = 1, \quad v(1) = 0, \quad v'(1) = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad N_3(\xi) = \left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right) l, \quad \text{itd.} \\ N_4(\xi) &= \xi, \quad N_5(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3, \quad N_6(\xi) = \left(-\xi^2 + \xi^3\right) l. \end{aligned} \tag{405}$$

Zarówno te funkcje, jak i ich pochodne względem zmiennej $\bar{x}$ (drugie dla N_2, N_3, N_5, N_6 i pierwsze dla N_1, N_4), potrzebne w dalszych rozważaniach zostały zestawione w poniższej Tabeli.

N_1, N_1'	$1 - \xi$	$-1/l$
N_2, N_2''	$1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$	$-(6 - 12\xi)/l^2$
N_3, N_3''	$\left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right) l$	$-(4 - 6\xi)/l$
N_4, N_4'	ξ	$1/l$
N_5, N_5''	$3\xi^2 - 2\xi^3$	$(6 - 12\xi)/l^2$
N_6, N_6''	$\left(-\xi^2 + \xi^3\right) l$	$-(2 - 6\xi)/l$

Przebieg funkcji kształtu jest pokazany na Rys. 35.



Rys. 35: *Funkcje kształtu* $N_1, N_2, N_3/l, N_4, N_5, N_6/l$.

Oczywiście, związki (402) są ścisłe dla prętów pryzmatycznych (tzn. o stałym przekroju).

Funkcje te tworzą macierze funkcji kształtu (macierze kolumnowe 1×6) w lokalnym układzie współrzędnych

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{N}}_v &= \left[\bar{\mathbf{N}}_{vi}, \bar{\mathbf{N}}_{vj}\right]^T = \bar{\mathbf{N}}_v(\xi), \\ \bar{\mathbf{N}}_u &= \left[\bar{\mathbf{N}}_{ui}, \bar{\mathbf{N}}_{uj}\right]^T = \bar{\mathbf{N}}_u(\xi), \end{aligned} \tag{406}$$

gdzie bloki dla węzłów i i j elementu e mają postać

$$\bar{\mathbf{N}}_{vi} = [0, N_2, N_3]^T, \quad \bar{\mathbf{N}}_{vj} = [0, N_5, N_6]^T, \tag{407}$$

dla zginania i

$$\bar{\mathbf{N}}_{ui} = [N_1, 0, 0]^T, \quad \bar{\mathbf{N}}_{vj} = [N_4, 0, 0]^T, \tag{408}$$

dla rozciągania.

C) **Wektor sił brzegowych**. W lokalnym układzie wspólrzenych siły na brzegu elementu e są pokazane na Rys. 31. Definiujemy wtedy następujacy wektor sił brzegowych dla tego elementu

$$\bar{\mathbf{Q}}_b^e = \left[\bar{\mathbf{Q}}_{bi}^e, \bar{\mathbf{Q}}_{bj}^e\right]^T = \bar{\mathbf{Q}}_b^e(t), \tag{409}$$

gdzie wektory dla węzłów i i j są następujące

$$\bar{\mathbf{Q}}_{bi}^e = [N_{ij}, T_{ij}, M_{ij}]^T, \quad \bar{\mathbf{Q}}_{bj}^e = [N_{ji}, T_{ji}, M_{ji}]^T. \tag{410}$$

D) **Wektor przemieszczeń brzegowych**. Wektor ten jest określony w lokalnym układzie współrzędnych przez następujący związek

$$\bar{\mathbf{q}}^e = \left[\bar{\mathbf{q}}_i^e, \bar{\mathbf{q}}_j^e\right]^T = \bar{\mathbf{q}}^e(t). \tag{411}$$

gdzie bloki przemieszczeń węzłów i i j mają postać

$$\bar{\mathbf{q}}_i^e = [u_i, w_i, \varphi_i]^T, \quad \bar{\mathbf{q}}_j^e = \left[u_j, w_j, \varphi_j\right]^T. \tag{412}$$

Biorąc pod uwagę powyższe definicje mamy ostatecznie następujące związki dla przemieszczeń w dowolnym punkcie elementu e

$$\begin{aligned} v(\bar{x}, t) &= \bar{\mathbf{N}}_v^T(\xi) \cdot \bar{q}^e(t), \quad \xi = \frac{\bar{x}}{l}, \\ u(\bar{x}, t) &= \bar{\mathbf{N}}_u^T(\xi) \cdot \bar{q}^e(t). \end{aligned} \tag{413}$$

Aby wyznaczyć te funkcje musimy znaleźć równania opisujące wektor przemieszczeń brzegowych $\bar{\mathbf{q}}^e$ jako funkcję czasu. Poszukujemy ich dla układu sprężystego (pomijając na razie lepkość!) przy pomocy funkcji Lagrange'a. W celu wyznaczenia tej funkcji musimy znaleźć funkcje energii potencjalnej i energii kinetycznej. Dla pierwszej z nich mamy

$$E_p = U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI} d\bar{x} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N^2}{EA} d\bar{x} - \int_0^l qv d\bar{x} - \int_0^l nu d\bar{x} - \bar{\mathbf{Q}}_b^{eT} \cdot \bar{\mathbf{q}}^e, \tag{414}$$

gdzie $q = q(\bar{x}, t)$ oznacza poprzeczne obciążenie ciągłe elementu (w niektórych książkach oznacza się je również przez p), a $n = n(\bar{x}, t)$ oznacza podłużne obciążenie ciągłe elementu. Jednocześnie mamy

$$\begin{aligned} M(\bar{x}, t) &= -EI(\bar{x}) \frac{\partial^2 v}{\partial \bar{x}^2} \equiv -EIv'', \\ N(\bar{x}, t) &= EA(\bar{x}) \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \equiv EAu' \equiv s^2 \frac{EI}{l^2} u', \end{aligned} \tag{415}$$

gdzie

$$v'' = \left(\bar{\mathbf{N}}_v''\right)^T \cdot \bar{\mathbf{q}}^e, \quad u' = \left(\bar{\mathbf{N}}_u'\right)^T \cdot \bar{\mathbf{q}}^e. \tag{416}$$

Podstawienie w (414) prowadzi do zależności

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^{eT} \cdot \int_0^l EI\left(\mathbf{N}_v'' \mathbf{N}_v''^T\right) d\bar{x} \bar{\mathbf{q}}^e + \frac{1}{2} \mathbf{q}^{eT} \cdot \int_0^l EA\left(\mathbf{N}_u' \mathbf{N}_u'^T\right) d\bar{x} \bar{\mathbf{q}}^e - \\ &- \int_0^l q \bar{\mathbf{N}}_v^T d\bar{x} \cdot \bar{\mathbf{q}}^e - \int_0^l n \bar{\mathbf{N}}_u^T d\bar{x} \cdot \bar{\mathbf{q}}^e - \bar{\mathbf{Q}}_b^{eT} \cdot \bar{\mathbf{q}}^e. \end{aligned} \tag{417}$$

Całki z pochodnych funkcji kształtu w powyższych związkach określają macierz sztywności $\bar{\mathbf{K}}^e$ (macierz symetryczna 6×6) w lokalnym układzie współrzędnych

$$\bar{\mathbf{K}}^e = \int_0^l EI\left(\mathbf{N}_v'' \mathbf{N}_v''^T\right) d\bar{x} + \int_0^l EA\left(\mathbf{N}_u' \mathbf{N}_u'^T\right) d\bar{x}. \tag{418}$$

Pozostałe człony określają wektor obciążenia zewnętrznego elementu w lokalnym układzie współrzędnych

$$\bar{\mathbf{Q}}_p^e = \int_0^l q \bar{\mathbf{N}}_v d\bar{x} + \int_0^l n \bar{\mathbf{N}}_u d\bar{x}. \tag{419}$$

Dla energii potencjalnej otrzymujemy ostatecznie

$$U = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^{eT} \cdot \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{q}}^e - \bar{\mathbf{Q}}_p^{eT} \cdot \bar{\mathbf{q}}^e - \bar{\mathbf{Q}}_b^{eT} \cdot \bar{\mathbf{q}}^e. \tag{420}$$

Macierz sztywności (418) wygodnie jest rozbić również na bloki, związane z węzłami. Zapisujemy ją w postaci

$$\begin{gathered} \bar{\mathbf{K}}^e = \bar{\mathbf{K}}_v^e + \bar{\mathbf{K}}_u^e, \\ \bar{\mathbf{K}}_v^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{vii}^e & \bar{\mathbf{K}}_{vij}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{vji}^e & \bar{\mathbf{K}}_{vjj}^e \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_u^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{uii}^e & \bar{\mathbf{K}}_{uij}^e \\ \bar{\mathbf{K}}_{uji}^e & \bar{\mathbf{K}}_{ujj}^e \end{bmatrix}, \end{gathered} \tag{421}$$

a poszczególne bloki określają następujące wzory

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_{vii}^e &= \int_0^1 EI\left(\bar{\mathbf{N}}_{vi}'' \bar{\mathbf{N}}_{vi}''^T\right) l d\xi, \quad \bar{\mathbf{K}}_{vij}^e = \int_0^1 EI\left(\bar{\mathbf{N}}_{vi}'' \bar{\mathbf{N}}_{vj}''^T\right) l d\xi, \\ \bar{\mathbf{K}}_{vji}^e &= \int_0^1 EI\left(\bar{\mathbf{N}}_{vj}'' \bar{\mathbf{N}}_{vi}''^T\right) l d\xi, \quad \bar{\mathbf{K}}_{vjj}^e = \int_0^1 EI\left(\bar{\mathbf{N}}_{vj}'' \bar{\mathbf{N}}_{vj}''^T\right) l d\xi, \\ \bar{\mathbf{K}}_{uii}^e &= \int_0^1 EA\left(\bar{\mathbf{N}}_{ui}' \bar{\mathbf{N}}_i'^T\right) l d\xi, \quad \bar{\mathbf{K}}_{uij}^e = \int_0^1 EA\left(\bar{\mathbf{N}}_{ui}' \bar{\mathbf{N}}_{uj}'^T\right) l d\xi, \end{aligned} \tag{422}$$

$$\bar{\mathbf{K}}^e_{uji} = \int_0^1 EA\left(\bar{\mathbf{N}}'_{uj}\bar{\mathbf{N}}'^T_{i}\right) ld\xi, \quad \bar{\mathbf{K}}^e_{ujj} = \int_0^1 EA\left(\bar{\mathbf{N}}'_{uj}\bar{\mathbf{N}}'^T_{uj}\right) ld\xi.$$

Podstawienie wzorów z Tabeli dla pochodnych funkcji kształtu daje dla części dotyczącej zginania

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{K}}^e_{vii} &= \int_0^1 EI\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (6-12\xi)^2/l^3 & (6-12\xi)(4-6\xi)/l^2 \\ 0 & (6-12\xi)(4-6\xi)/l^2 & (4-6\xi)^2/l \end{bmatrix} d\xi, \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{vij} &= \int_0^1 EI\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(6-12\xi)^2/l^3 & (6-12\xi)(2-6\xi)/l^2 \\ 0 & -(6-12\xi)(4-6\xi)/l^2 & (4-6\xi)(2-6\xi)/l \end{bmatrix} d\xi, \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{vji} &= \int_0^1 EI\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(6-12\xi)^2/l^3 & -(6-12\xi)(4-6\xi)/l^2 \\ 0 & (6-12\xi)(2-6\xi)/l^2 & (4-6\xi)(2-6\xi)/l \end{bmatrix} d\xi, \qquad (423) \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{vjj} &= \int_0^1 EI\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (6-12\xi)^2/l^3 & -(6-12\xi)(2-6\xi)/l^2 \\ 0 & -(6-12\xi)(2-6\xi)/l^2 & (2-6\xi)^2/l \end{bmatrix} d\xi.
\end{aligned}$$

Dla rozciągania mamy

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{K}}^e_{uii} &= \int_0^1 EA\begin{bmatrix} 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi, \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{uij} &= \int_0^1 EA\begin{bmatrix} -1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi, \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{uji} &= \int_0^1 EA\begin{bmatrix} -1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi, \qquad (424) \\
\bar{\mathbf{K}}^e_{ujj} &= \int_0^1 EI\begin{bmatrix} 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\xi.
\end{aligned}$$

W przypadku elementów pryzmatycznych, to znaczy o stałej sztywności na zginanie EI i na rozciąganie EA otrzymuje się następujące bloki sztywności dla zginania

$$\bar{\mathbf{K}}^e_{vii} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l \\ 0 & 6l & -4l^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}^e_{vij} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6l \\ 0 & -6l & 2l^2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{K}}^e_{vji} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}^e_{vjj} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l \\ 0 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \qquad (425)$$

a pełna część macierzy sztywności na zginanie takiego elementu jest następująca

$$\bar{\mathbf{K}}_v^e = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 6l & -4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6l & 0 & 12 & 6l \\ 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}, \tag{426}$$

i jest ona, oczywiście, symetryczna.

Bloki dla rozciągania elementu pryzmatycznego są następujące

$$\bar{\mathbf{K}}_{uii}^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{uij}^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{uji}^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{ujj}^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{427}$$

Te bloki tworzą również symetryczną macierz $\bar{\mathbf{K}}_u^e$.

Energia kinetyczna elementu wynika z definicji

$$E_k = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{v}^2 d\bar{x} + \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{u}^2 d\bar{x}, \tag{428}$$

gdzie

$$\dot{v} = \bar{\mathbf{N}}_v^T \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}^e, \quad \dot{u} = \bar{\mathbf{N}}_u^T \cdot \dot{\bar{\mathbf{q}}}^e. \tag{429}$$

Oznacza to, że energię kinetyczną można zapisać w postaci

$$E_k = \frac{1}{2}\dot{\bar{\mathbf{q}}}^{eT} \cdot \bar{\mathbf{B}}^e \dot{\bar{\mathbf{q}}}^e, \tag{430}$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{B}}^e = \int_0^l \mu \bar{\mathbf{N}}_v \bar{\mathbf{N}}_v^T d\bar{x} + \int_0^l \mu \bar{\mathbf{N}}_u \bar{\mathbf{N}}_u^T d\bar{x}, \tag{431}$$

jest macierzą bezwładności (macierz symetryczna 6×6) w lokalnym układzie współrzędnych. Macierz tą będziemy także wykorzystywali dalej w postaci blokowej

$$\bar{\mathbf{B}}^e = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{ii}^e & \bar{\mathbf{B}}_{ij}^e \\ \bar{\mathbf{B}}_{ji}^e & \bar{\mathbf{B}}_{jj}^e \end{bmatrix}, \tag{432}$$

gdzie

$$\bar{\mathbf{B}}_{ii}^e = \int_0^1 \mu\left(\bar{\mathbf{N}}_{vi}\bar{\mathbf{N}}_{vi}^T l d\xi + \bar{\mathbf{N}}_{ui}\bar{\mathbf{N}}_{ui}^T\right) l d\xi, \quad \bar{\mathbf{B}}_{ij}^e = \int_0^1 \mu\left(\bar{\mathbf{N}}_{vi}\bar{\mathbf{N}}_{vj}^T l d\xi + \bar{\mathbf{N}}_{ui}\bar{\mathbf{N}}_{uj}^T\right) l d\xi, \tag{433}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{ji}^e = \int_0^1 \mu\left(\bar{\mathbf{N}}_{vj}\bar{\mathbf{N}}_{vi}^T l d\xi + \bar{\mathbf{N}}_{uj}\bar{\mathbf{N}}_{ui}^T\right) l d\xi, \quad \bar{\mathbf{B}}_{jj}^e = \int_0^1 \mu\left(\bar{\mathbf{N}}_{vj}\bar{\mathbf{N}}_{vj}^T l d\xi + \bar{\mathbf{N}}_{uj}\bar{\mathbf{N}}_{uj}^T\right) l d\xi.$$

Podobnie jak dla sztywności, podstawienie funkcji kształtu prowadzi do wzorów

$$\bar{\mathbf{B}}^e_{ii} = \int_0^1 \mu \begin{bmatrix} (1-\xi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)^2 & \begin{array}{c}\left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)\times \\ \times\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)l\end{array} \\ 0 & \begin{array}{c}\left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)\times \\ \times\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)l\end{array} & \left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)^2 l^2 \end{bmatrix} ld\xi,$$

$$\bar{\mathbf{B}}^e_{ij} = \int_0^1 \mu \begin{bmatrix} (1-\xi)\,\xi & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{c}\left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)\times \\ \times\left(3\xi^2-2\xi^3\right)\end{array} & \begin{array}{c}\left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)\times \\ \times\left(-\xi^2+\xi^3\right)l\end{array} \\ 0 & \begin{array}{c}\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)l\times \\ \times\left(3\xi^2-2\xi^3\right)\end{array} & \begin{array}{c}\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)l\times \\ \times\left(-\xi^2+\xi^3\right)l\end{array} \end{bmatrix} ld\xi, \tag{434}$$

$$\bar{\mathbf{B}}^e_{ji} = \int_0^1 \mu \begin{bmatrix} \xi\,(1-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & \begin{array}{c}\left(3\xi^2-2\xi^3\right)\times \\ \times\left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)\end{array} & \begin{array}{c}\left(3\xi^2-2\xi^3\right)\times \\ \times\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)l\end{array} \\ 0 & \begin{array}{c}\left(-\xi^2+\xi^3\right)l\times \\ \times\left(1-3\xi^2+2\xi^3\right)\end{array} & \begin{array}{c}\left(-\xi^2+\xi^3\right)l\times \\ \times\left(\xi-2\xi^2+\xi^3\right)l\end{array} \end{bmatrix} ld\xi,$$

$$\bar{\mathbf{B}}^e_{jj} = \int_0^1 \mu \begin{bmatrix} \xi^2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(3\xi^2-2\xi^3\right)^2 & \begin{array}{c}\left(3\xi^2-2\xi^3\right)\times \\ \times\left(-\xi^2+\xi^3\right)l\end{array} \\ 0 & \begin{array}{c}\left(3\xi^2-2\xi^3\right)\times \\ \times\left(-\xi^2+\xi^3\right)l\end{array} & \left(-\xi^2+\xi^3\right)^2 l^2 \end{bmatrix} ld\xi.$$

Wreszcie w przypadku szczególnym belki pryzmatycznej (o stałej gęstości masy) otrzymujemy

$$\bar{\mathbf{B}}^e_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\mu l}{35} & \frac{11\mu l^2}{210} \\ 0 & \frac{11\mu l^2}{210} & \frac{\mu l^3}{105} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}^e_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\mu l}{70} & -\frac{13\mu l^2}{420} \\ 0 & \frac{13\mu l^2}{420} & -\frac{\mu l^3}{140} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\mathbf{B}}^e_{ji} = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\mu l}{70} & \frac{13\mu l^2}{420} \\ 0 & -\frac{13\mu l^2}{420} & -\frac{\mu l^3}{140} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}^e_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\mu l}{35} & -\frac{11\mu l^2}{210} \\ 0 & -\frac{11\mu l^2}{210} & \frac{\mu l^3}{105} \end{bmatrix}. \tag{435}$$

Oczywiście, cała macierz bezwładności jest symetryczna

$$\bar{\mathbf{B}}^e = \begin{bmatrix} \frac{\mu l}{3} & 0 & 0 & \frac{\mu l}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\mu l}{35} & \frac{11\mu l^2}{210} & 0 & \frac{9\mu l}{70} & -\frac{13\mu l^2}{420} \\ 0 & \frac{11\mu l^2}{210} & \frac{\mu l^3}{105} & 0 & \frac{13\mu l^2}{420} & -\frac{\mu l^3}{140} \\ \frac{\mu l}{6} & 0 & 0 & \frac{\mu l}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\mu l}{70} & \frac{13\mu l^2}{420} & 0 & \frac{13\mu l}{35} & -\frac{11\mu l^2}{210} \\ 0 & -\frac{13\mu l^2}{420} & -\frac{\mu l^3}{140} & 0 & -\frac{11\mu l^2}{210} & \frac{\mu l^3}{105} \end{bmatrix}. \tag{436}$$

Funkcja Lagrange'a

$$L = E_k - U, \tag{437}$$

prowadzi teraz do równań ruchu

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\mathbf{q}}}^e} - \frac{\partial L}{\partial \bar{\mathbf{q}}^e} = 0. \tag{438}$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$\bar{\mathbf{B}}^e \ddot{\bar{\mathbf{q}}}^e + \bar{\mathbf{K}}^e \bar{\mathbf{q}}^e - \bar{\mathbf{Q}}^e_p = \bar{\mathbf{Q}}^e_b. \tag{439}$$

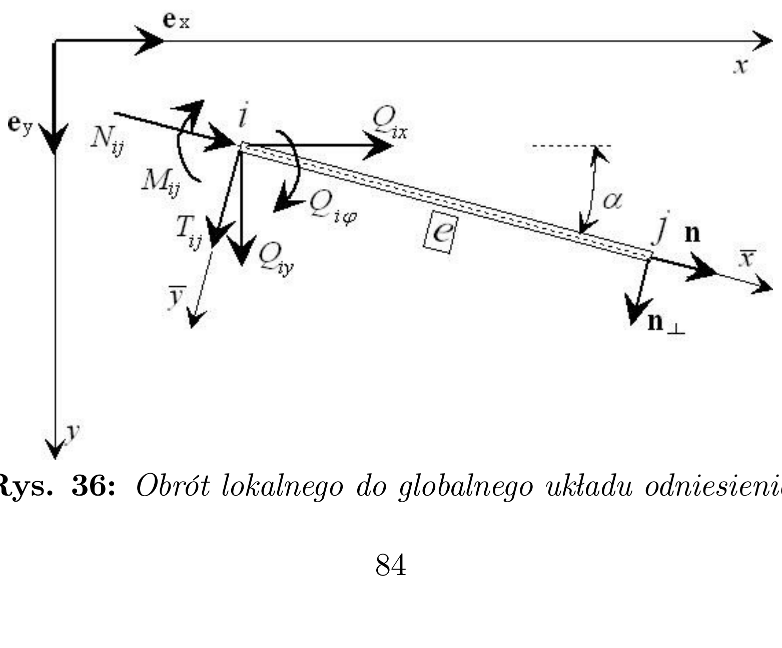
Jest to układ równań różniczkowych zwyczajnych, określających wektor przemieszczenia $\bar{\mathbf{q}}^e$ elementu e jako funkcję czasu. Rozwiązanie tego układu dla każdego elementu oddzielnienie nie jest, oczywiście, możliwe, gdyż prawe strony tych równań, zawierające siły brzegowe, sprzęgają układ dla elementu e z równaniami dla elementów, które są w kontakcie z tym elementem poprzez węzły i i j. Widać to wyraźnie, gdy macierze, występujące w powyższym równaniu rozbijemy na bloki węzłowe

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{B}}^e_{ii}\ddot{\bar{\mathbf{q}}}^e_i + \bar{\mathbf{B}}^e_{ij}\ddot{\bar{\mathbf{q}}}^e_j + \bar{\mathbf{K}}^e_{ii}\bar{\mathbf{q}}^e_i + \bar{\mathbf{K}}^e_{ij}\bar{\mathbf{q}}^e_j - \bar{\mathbf{Q}}^e_{pi} &= \bar{\mathbf{Q}}^e_{bi}, \\ \bar{\mathbf{B}}^e_{ji}\ddot{\bar{\mathbf{q}}}^e_i + \bar{\mathbf{B}}^e_{jj}\ddot{\bar{\mathbf{q}}}^e_j + \bar{\mathbf{K}}^e_{ji}\bar{\mathbf{q}}^e_i + \bar{\mathbf{K}}^e_{jj}\bar{\mathbf{q}}^e_j - \bar{\mathbf{Q}}^e_{pj} &= \bar{\mathbf{Q}}^e_{bj}. \end{aligned} \tag{440}$$

Aby opisać te sprzężenia musimy równania dla wszystkich elementów napisać w tym samym, globalnym układzie współrzędnych.

5.3 Globalne równanie ruchu

Przejście od lokalnego układu współrzędnych dla elementu e do globalnego układu współrzędnych wymaga transformacji bazy wektorowej. Lokalną bazę dla elementu prętowego oznaczymy $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_\perp)$, gdzie wektor $\mathbf{n}$ jest wektorem jednostkowym, skierowanym wzdłuż pręta, a wektor $\mathbf{n}_\perp$ jest wektorem jednostkowym, prostopadłym do $\mathbf{n}$ i tworzącym z nim układ lewoskrętny, to znaczy o takiej samej skrętności jak układ wektorów bazowych globalnego układu współrzędnych $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ (patrz Rys. 36).



Rys. 36: *Obrót lokalnego do globalnego układu odniesienia*

Działanie transformacji układu współrzędnych zademonstrujemy na przykładzie wektora sił brzegowych elementu e w węźle i. Ponieważ przekształcamy współrzędne na płaszczyźnie prostopadłej do wektora momentu zginającego, więc ten ostatni nie ulega zmianie przy takiej transformacji. Dla pozostałych dwóch składowych wektora $\bar{\mathbf{Q}}^e_{bi}$ mamy wtedy transformację od współrzędnych w układzie lokalnym $\bar{\mathbf{Q}}^e_{bi} = [N_{ij}, T_{ij}, M_{ij}]^T$ do współrzędnych w układzie globalnym $\mathbf{Q}^e_{bi} = [Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{i\varphi}]$, $Q_{i\varphi} \equiv M_{ij}$, opisaną związkiem

$$\begin{aligned} N_{ij}\mathbf{n}+T_{ij}\mathbf{n}_\perp &= Q_{ix}\mathbf{e}_x + Q_{iy}\mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad N_{ij} = Q_{ix}\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x + Q_{iy}\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y, \quad T_{ij} = Q_{ix}\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_x + Q_{iy}\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_y \\ M_{ij} &= Q_{i\varphi}, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x = \mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_y = \cos\alpha, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y = -\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_x = \sin\alpha, \end{aligned} \tag{441}$$

to znaczy

$$\begin{bmatrix} N_{ij} \\ T_{ij} \\ M_{ij} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y & 0 \\ \mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{ix} \\ Q_{iy} \\ Q_{i\varphi} \end{bmatrix}. \tag{442}$$

W postaci zwartej

$$\bar{\mathbf{Q}}^e_{bi} = \mathbf{O}^e\mathbf{Q}^e_{bi} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^e_{bi} = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{Q}}^e_{bi}. \tag{443}$$

Macierz, opisująca obrót bazy wektorowej elementu e

$$\mathbf{O}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y & 0 \\ \mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{444}$$

jest macierzą ortogonalną

$$\mathbf{O}^{e-1} = \mathbf{O}^{eT} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{O}^e\mathbf{O}^{eT} = \mathbf{1}, \quad \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{445}$$

co oznacza, że wektor, na który działa ta macierz zmienia kierunek, ale nie długość. Na przykład, dla dowolnego wektora $\mathbf{V}$ macierz o własności (445) przekształca go w wektor $\mathbf{O}^e\mathbf{V}$, dla którego mamy

$$(\mathbf{O}^e\mathbf{V})\cdot(\mathbf{O}^e\mathbf{V}) = \mathbf{V}\cdot\mathbf{O}^{eT}\mathbf{O}^e\mathbf{V} = \mathbf{V}\cdot\mathbf{V}, \tag{446}$$

to znaczy nowy wektor ma inny kierunek, ale tą samą długość, czyli powstaje jedynie przez obrót.

Siły brzegowe, działające w węźle j elementu e można przetransformować analogicznie

$$\begin{aligned} N_{ji}\mathbf{n}+T_{ji}\mathbf{n}_\perp &= Q_{jx}\mathbf{e}_x + Q_{jy}\mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad N_{ji} = Q_{jx}\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x + Q_{jy}\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y, \quad T_{ji} = Q_{jx}\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_x + Q_{jy}\mathbf{n}_\perp\cdot\mathbf{e}_y \\ M_{ji} &= Q_{j\varphi}. \end{aligned} \tag{447}$$

A więc

$$\bar{\mathbf{Q}}^e_{bj} = \mathbf{O}^e\mathbf{Q}^e_{bj} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}^e_{bj} = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{Q}}^e_{bj}. \tag{448}$$

Łącząc związki (441) i (447) otrzymujemy

$$\bar{\mathbf{Q}}_b^e = \mathbf{T}^e \mathbf{Q}_b^e, \tag{449}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_b^e &= \left[\mathbf{Q}_{bi}^e, \mathbf{Q}_{bj}^e\right]^T, \\
\mathbf{Q}_{bi}^e &= \left[Q_{ix}, Q_{iy}, Q_{i\varphi}\right]^T, \quad \mathbf{Q}_{bj}^e = \left[Q_{jx}, Q_{jy}, Q_{j\varphi}\right]^T, \\
\mathbf{T}^e &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}^e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{O}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{eT} = \mathbf{T}^{e-1},
\end{aligned} \tag{450}$$

czyli macierz transformacji elementu e – $\mathbf{T}^e$ – jest również ortogonalna. Wektory $\mathbf{Q}_{bi}^e, \mathbf{Q}_{bj}^e$ określają wektory sił brzegowych w węzłach, odpowiednio, i i j elementu e w globalnym układzie współrzędnych.

Przy pomocy macierzy obrotu możemy przetransformować również wektor przemieszczeń brzegowych $\bar{\mathbf{q}}^e$ i wektor obciążeń zewnętrznych

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_i^e &= \mathbf{O}^{eT} \bar{\mathbf{q}}_i^e, \quad \bar{\mathbf{q}}_j^e = \mathbf{O}^e \mathbf{q}_j^e, \\
\mathbf{q}^e &= \left[\ \mathbf{q}_i^e, \ \ \mathbf{q}_j^e\ \right]^T, \quad \mathbf{q}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{q}}^e,
\end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_p^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{Q}}_p^e. \tag{451}$$

Wielkości $\mathbf{q}^e, \mathbf{Q}_b^e, \mathbf{Q}_p^e$ są wektorami przemieszczeń, sił brzegowych i obciążenia zewnętrznego dla elementu e w globalnym układzie współrzędnych.

W dalszym ciągu równania ruchu elementu e nie będziemy używać w postaci przetransformowanego równania (439), ale można łatwo taką transformację do układu globalnego wykonać

$$\mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{B}}^e \mathbf{T}^e \left(\mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{q}}^e\right)^{\bullet\bullet} + \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e \left(\mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{q}}^e\right) - \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{Q}}_p^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{Q}}_b^e. \tag{452}$$

Po pomnożeniu przez $\mathbf{T}^e$ otrzymujemy

$$\mathbf{B}^e \ddot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{Q}_p^e = \mathbf{Q}_b^e, \tag{453}$$

gdzie

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{B}}^e \mathbf{T}^e, \quad \mathbf{K}^e = \mathbf{T}^{eT} \bar{\mathbf{K}}^e \mathbf{T}^e, \tag{454}$$

są macierzami bezwładności i sztywności elementu e w globalnym układzie współrzędnych. Postać tej transformacji wyjaśnimy dalej.

Warunki, które są potrzebne do domknięcia równań ruchu wymagają również znajomości transformacji bloków macierzy sztywności i bezwładności. Rozpatrzmy najpierw iloczyn $\bar{\mathbf{K}}_{ii}^e \bar{\mathbf{q}}_i^e$, opisujący jedną z sił występujących w równaniach ruchu (440). Jako wektor musi się on transformować do globalnego układu współrzędnych według opisanych powyżej reguł. Mamy więc

$$\mathbf{K}_{ii}^e \mathbf{q}_i^e = \mathbf{O}^{eT} \left(\bar{\mathbf{K}}_{ii}^e \bar{\mathbf{q}}_i^e\right). \tag{455}$$

Po podstawieniu reguły dla przemieszczenia uogólnionego mamy

$$\mathbf{K}_{ii}^e \mathbf{q}_i^e = \left(\mathbf{O}^{eT} \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e \mathbf{O}^e\right) \mathbf{q}_i^e. \tag{456}$$

Ponieważ ten związek musi zachodzić dla dowolnych wektorów $\mathbf{q}_i^e$, więc musi być

$$\mathbf{K}_{ii}^e = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{K}}_{ii}^e\mathbf{O}^e. \tag{457}$$

Analogicznie dowodzi się następujących związków

$$\mathbf{K}_{ij}^e = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{K}}_{ij}^e\mathbf{O}^e, \quad \mathbf{K}_{ji}^e = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{K}}_{ji}^e\mathbf{O}^e, \quad \mathbf{K}_{jj}^e = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{K}}_{jj}^e\mathbf{O}^e,$$

$$\mathbf{B}_{ii}^e = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{B}}_{ii}^e\mathbf{O}^e, \quad \mathbf{B}_{ij}^e = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{B}}_{ij}^e\mathbf{O}^e, \quad \mathbf{B}_{ji}^e = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{B}}_{ji}^e\mathbf{O}^e, \quad \mathbf{B}_{jj}^e = \mathbf{O}^{eT}\bar{\mathbf{B}}_{jj}^e\mathbf{O}^e. \tag{458}$$

W dalszym ciągu skoncentrujemy uwagę na wybranym węźle $i, i = 1, ..., n$. Dla tego węzła wyprowadziliśmy równania ruchu w lokalnym układzie współrzędnych (440)

$$\bar{\mathbf{B}}_{ii}^e\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_i^e + \bar{\mathbf{B}}_{ij}^e\ddot{\bar{\mathbf{q}}}_j^e + \bar{\mathbf{K}}_{ii}^e\bar{\mathbf{q}}_i^e + \bar{\mathbf{K}}_{ij}^e\bar{\mathbf{q}}_j^e - \bar{\mathbf{Q}}_{pi}^e = \bar{\mathbf{Q}}_{bi}^e.$$

Po wykonaniu transformacji do globalnego układu współrzędnych mamy

$$\mathbf{B}_{ii}^e\ddot{\mathbf{q}}_i^e + \mathbf{B}_{ij}^e\ddot{\mathbf{q}}_j^e + \mathbf{K}_{ii}^e\mathbf{q}_i^e + \mathbf{K}_{ij}^e\mathbf{q}_j^e - \mathbf{Q}_{pi}^e = \mathbf{Q}_{bi}^e. \tag{459}$$

Określimy teraz dwa warunki, które pozwolą wyeliminować z tych równań nieznane siły brzegowe $\mathbf{Q}_{bi}^e$.

Warunek pierwszy dotyczy geometrii węzłów układu. Oznaczmy przez $\mathcal{A}_i$ zbiór elementów e, które zbiegają się w węźle i. W przypadku sztywnego połączenia elementów w węźle przemieszczenia uogólnione wszystkich elementów w tym węźle muszą być takie same, tzn.

$$\begin{aligned} \forall_{e\in\mathcal{A}_i} \quad \mathbf{q}_i^e &= \mathbf{q}_i \quad \text{lub w układzie współrzędnych} \\ \forall_{e\in\mathcal{A}_i} \quad u_{xi}^e &= u_{xi}, \quad u_{yi}^e = u_{yi}, \quad \varphi_i^e = \varphi_i, \end{aligned} \tag{460}$$

gdzie $\mathbf{q}_i$ nazywamy przemieszczeniem uogólnionym węzła i. u_{xi} jest przemieszczeniem węzła i w kierunku globalnej osi x (tzn. wersora $\mathbf{e}_x$), a u_{yi} przemieszczeniem w kierunku osi y (tzn. wersora $\mathbf{e}_y$). φ_i jest obrotem węzła i. Warunek ten jest nazywany warunkiem geometrycznej zgodności. W przypadku przegubowych połączeń niektórych elementów musi on być nieco zmodyfikowany.

Warunek drugi jest warunkiem dynamicznej równowagi węzła i. Jeśli węzeł jest dodatkowo obciążony zewnętrzną siłą $\mathbf{P}_i^{ext} = \left[P_{xi}^{ext}, P_{yi}^{ext}\right]^T$ i momentem zginającym M_i^{ext}, tzn. siłą uogólnioną $\mathbf{P}_i = \left[P_{xi}^{ext}, P_{yi}^{ext}, M_i^{ext}\right]^T$, jak również umocowana jest w nim masa m_i o bezwładności obrotowej J_{0i}, to warunek ten ma postać $i, i = 1, ..., n$

$$\begin{aligned} \sum_{e\in\mathcal{A}_i} Q_{ix}^e &= P_{ix}^{ext} - m_i\ddot{u}_{ix}, \\ \sum_{e\in\mathcal{A}_i} Q_{iy}^e &= P_{iy}^{ext} - m_i\ddot{u}_{iy}, \\ \sum_{e\in\mathcal{A}_i} Q_{i\varphi}^e &= M_i^{ext} - J_{0i}\ddot{\varphi}_i, \end{aligned} \tag{461}$$

to znaczy

$$\sum_{e\in\mathcal{A}_i} \mathbf{Q}_{bi}^e = \mathbf{P}_i - \mathbf{B}_i\ddot{\mathbf{q}}_i, \quad \mathbf{B}_i = [m_i, m_i, J_{0i}]^T. \tag{462}$$

W tych wzorach $\mathbf{Q}_{bi}^e$ jest, oczywiście, siłą brzegową w węźle i elementu e. $\mathbf{B}_i$ jest macierzą bezwładności węzła i.

Powyższe warunki pozwalają wyeliminować siły brzegowe z równań ruchu. Podstawiając (459) w (462) otrzymujemy

$$\left(\sum_{e\in\mathcal{A}_i}\mathbf{B}_{ii}^e+\mathbf{B}_i\right)\ddot{\mathbf{q}}_i+\sum_{e\in\mathcal{A}_i}\left(\mathbf{B}_{ij}^e\ddot{\mathbf{q}}_j\right)+\sum_{e\in\mathcal{A}_i}\mathbf{K}_{ii}^e\mathbf{q}_i+\sum_{e\in\mathcal{A}_i}\left(\mathbf{K}_{ij}^e\mathbf{q}_j\right)=$$

$$=\mathbf{P}_i+\sum_{e\in\mathcal{A}_i}\mathbf{Q}_{pi}^e,\quad i=1,...,n. \tag{463}$$

Jest to układ n równań (1×3)-wektorowych dla n (1×3)-wektorów przemieszczeń uogólnionych $\mathbf{q}_i$ węzłów. Nazywamy je globalnymi równaniami ruchu. Równania te są równaniami różniczkowymi drugiego rzędu względem czasu i dokonując odpowiedniej konstrukcji globalnej macierzy bezwładności $\mathbf{B}$ i globalnej macierzy sztywności $\mathbf{K}$ można je zapisać w postaci

$$\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\mathbf{q}=\mathbf{P}+\mathbf{Q}_p, \tag{464}$$

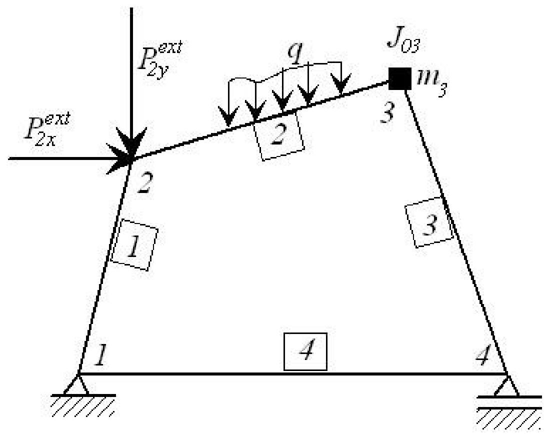
$$\mathbf{q}=[\mathbf{q}_1,...,\mathbf{q}_n]^T,\quad \mathbf{P}=[\mathbf{P}_1,...,\mathbf{P}_n]^T,\quad \mathbf{Q}_p=\left[\sum_{e\in\mathcal{A}_1}\mathbf{Q}_{p1}^e,...,\sum_{e\in\mathcal{A}_n}\mathbf{Q}_{pn}^e\right]^T. \tag{465}$$

Rozwiązania tego układu dają funkcje czasu $\mathbf{q}_i(t), i=1,...,n$, które poprzez warunki geometrycznej zgodności i reguły transformacji dają wektory $\bar{\mathbf{q}}_i^e(t)=\mathbf{O}^e\mathbf{q}(t)$. Ich podstawienie w związkach (402) prowadzi do funkcji przemieszczeń $u(\bar{x},t)$ i $v(\bar{x},t)$ poszczególnych elementów, a tym samym do sił przekrojowych w dowolnym punkcie konstrukcji.

Przy konstrukcji układu (463) nie rozróżniamy węzłów podporowych od innych węzłów układu. Oznacza to, że przy konstrukcji globalnych równań ruchu trzeba uwzględnić więzy, które przekształcają niektóre z tych równań w związki algebraiczne, a przynajmniej powodują redukcję rzędu macierzy sztywności $\mathbf{B}$.

Powyższe związki są formalnie identyczne z tymi, które rozpatrywaliśmy dla układów o skończonej liczbie stopni swobody. Tym samym ich analiza: poszukiwanie częstotliwości drgań własnych i modów drgań, częstotliwości rezonansowych, rozwiązań problemów drgań
wymuszonych przez obciążenia zewnętrzne zależne od czasu, itd. jest taka sama, jak poprzednio. Możemy również w sposób analogiczny wprowadzić efekty tłumienia, zakładając, że globalna macierz tłumienia $\mathbf{C}$ w dodatkowym członie $\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}$ równania (464) ma strukturę $\mathbf{C}=\mu\mathbf{B}+\kappa\mathbf{K}$, analogiczną do (143).

Przedstawimy trywialny przykład opisanej powyżej procedury. Na Rys. 37 przedstawiono szkic konstrukcji ramowej. Dla zadanego obiążenia trzeba skonstruować rozwiązanie problemu drgań metodą elementów skończonych. Przedstawimy jedynie zasadnicze kroki procedury rozwiązania.



Rys. 37: *Przykład konstrukcji ramowej do metody elementów skończonych*

Krok 1: Wybór elementów skończonych. Dla jasności schematu postępowania dokonujemy tu najgorszego wyboru, utożsamiając węzły elementów skończonych z węzłami konstrukcji, co oznacza, że w procedurze mamy tylko cztery elementy. Ich numeracja jest pokazana na Rys. 37. Aby rozwiązanie uzyskane metodą elementów skończonych było dobrym przybliżeniem rozwiązania ciągłego musielibyśmy przyjąć podział ze znacznie większą ilością elementów, wybierając co najmniej po kilka węzłów elementów w obrębie przęsła każdego z prętów.

Krok 2: Określenie macierzy sztywności i macierzy bezwładności w lokalnych układach współrzędnych. Przyjmijmy w naszym przykładzie, że pręty są pryzmatyczne i mają takie same sztywności EI, EA i gęstości masy μ. Wtedy dla czterech wybranych elementów skończonych otrzymujemy następujące lokalne bloki macierzy sztywności (por. (426), (427))

$$\bar{\mathbf{K}}_{11}^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_1^2} & -\frac{4EI}{l_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{12}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l_1^2} & \frac{2EI}{l_1} \end{bmatrix}, \tag{466}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{21}^1 = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l_1^3} & -\frac{6EI}{l_1^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_1^2} & \frac{2EI}{l_1} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{K}}_{22}^1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l_1^3} & \frac{6EI}{l_1^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l_1^2} & \frac{4EI}{l_1} \end{bmatrix}, \tag{467}$$

gdzie l_1 jest długością elementu 1. Dla pozostałych elementów: $\bar{\mathbf{K}}_{22}^2, \bar{\mathbf{K}}_{23}^2, \bar{\mathbf{K}}_{32}^2, \bar{\mathbf{K}}_{33}^2$, $\bar{\mathbf{K}}_{33}^3, \bar{\mathbf{K}}_{34}^3, \bar{\mathbf{K}}_{43}^3, \bar{\mathbf{K}}_{44}^3$, $\bar{\mathbf{K}}_{44}^4, \bar{\mathbf{K}}_{41}^4, \bar{\mathbf{K}}_{14}^4, \bar{\mathbf{K}}_{11}^4$ wzory są analogiczne z długością l_1 zastąpioną przez, odpowiednio, l_2, l_3 i l_4.

Bloki lokalnej macierzy bezwładności mają na podstawie wzoru (436) następującą postać

$$\bar{\mathbf{B}}_{11}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\mu l_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\mu l_1}{35} & \frac{11\mu l_1^2}{210} \\ 0 & \frac{11\mu l_1^2}{210} & \frac{\mu l_1^3}{105} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{12}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\mu l_1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\mu l_1}{70} & -\frac{13\mu l_1^2}{420} \\ 0 & \frac{13\mu l_1^2}{420} & -\frac{\mu l_1^3}{140} \end{bmatrix}, \tag{468}$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{21}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\mu l_1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9\mu l_1}{70} & \frac{13\mu l_1^2}{420} \\ 0 & -\frac{13\mu l_1^2}{420} & -\frac{\mu l_1^3}{140} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}_{22}^1 = \begin{bmatrix} \frac{\mu l_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{13\mu l_1}{35} & -\frac{11\mu l_1^2}{210} \\ 0 & -\frac{11\mu l_1^2}{210} & \frac{\mu l_1^3}{105} \end{bmatrix}. \tag{469}$$

Dla pozostałych elementów: $\bar{\mathbf{B}}^2_{22}, \bar{\mathbf{B}}^2_{23}, \bar{\mathbf{B}}^2_{32}, \bar{\mathbf{B}}^2_{33}, \bar{\mathbf{B}}^3_{33}, \bar{\mathbf{B}}^3_{34}, \bar{\mathbf{B}}^3_{43}, \bar{\mathbf{B}}^3_{44}, \bar{\mathbf{B}}^4_{44}, \bar{\mathbf{B}}^4_{41}, \bar{\mathbf{B}}^4_{14}, \bar{\mathbf{B}}^4_{11}$ wzory są znów analogiczne z długością l_1 zastąpioną przez, odpowiednio, l_2, l_3 i l_4.

Krok 3: Określenie glogalnych macierzy sztywności i bezwładności. Wykorzystujemy tu wzory (457), (458), w których macierze obrotu mają postać

$$\mathbf{O}^e = \begin{bmatrix} \cos\alpha^e & \sin\alpha^e & 0 \\ -\sin\alpha^e & \cos\alpha^e & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{470}$$

gdzie kąty $\alpha^e, e = 1, ..., 4$ określają nachylenie elementu w stosunku do osi poziomej. Jak widać na Rys. 37, kąty α^1, α^2 są ujemne, kąt α^3 jest dodatni, a $\alpha^4 = 0$.

W wyniku otrzymujemy bloki: $\mathbf{K}^1_{11}, \mathbf{K}^1_{12}, \mathbf{K}^2_{22}, \mathbf{K}^2_{23}, \mathbf{K}^3_{33}, \mathbf{K}^3_{34}, \mathbf{K}^4_{44}, \mathbf{K}^4_{41}$ oraz $\mathbf{B}^1_{11}, \mathbf{B}^1_{12}, \mathbf{B}^2_{22}, \mathbf{B}^2_{23}, \mathbf{B}^3_{33}, \mathbf{B}^3_{34}, \mathbf{B}^4_{44}, \mathbf{B}^4_{41}$. Zauważmy, że w naszym przykładzie do bloku macierzy w węźle trzecim trzeba dodać macierz bezwładności węzła

$$\mathbf{B}_3 = [m_3, m_3, J_{03}]^T. \tag{471}$$

Krok 4: Konstrukcja macierzy obciążeń zewnętrznych. W naszym przykładzie występują dwie takie macierze (por (419)):

$$\bar{\mathbf{Q}}^3_p = \int_0^1 q(\xi) \begin{bmatrix} -q(\xi)\sin\alpha^3 (1-\xi) \\ q(\xi)\cos\alpha^3 \left(1 - 3\xi^2 + 2\xi^3\right) \\ q(\xi)\cos\alpha^3 \left(\xi - 2\xi^2 + \xi^3\right) l_3 \\ -q(\xi)\sin\alpha^3 \xi \\ q(\xi)\cos\alpha^3 \left(3\xi^2 - 2\xi^3\right) \\ q(\xi)\cos\alpha^3 \left(\left(-\xi^2 + \xi^3\right) l_3\right) \end{bmatrix} l_3 d\xi, \quad \mathbf{Q}^3_p = \mathbf{T}^{3T}\bar{\mathbf{Q}}^3_p, \tag{472}$$

gdzie

$$\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} \cos\alpha^3 & \sin\alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha^3 & \cos\alpha^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha^3 & \sin\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha^3 & \cos\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{473}$$

oraz

$$\mathbf{P}_2 = \left[P^{ext}_{2x}, P^{ext}_{2y}, 0\right]^T. \tag{474}$$

Krok 5: Określenie wektora przemieszczeń w globalnym układzie współrzędnych. W naszym przykładzie mamy

$$\mathbf{q}_1 = [0, 0, \varphi_1]^T, \quad \mathbf{q}_2 = [u_{2x}, u_{2y}, \varphi_{21}]^T, \quad \mathbf{q}_3 = [u_{3x}, u_{3y}, \varphi_3]^T, \quad \mathbf{q}_4 = [u_{4x}, 0, \varphi_4]^T, \tag{475}$$

gdzie uwzględniono więzy podporowe.

Krok 6: Konstrukcja równań ruchu w globalnym układzie współrzędnych. Na podstawie (463) mamy

$$\left(\mathbf{B}^1_{11} + \mathbf{B}^4_{11}\right)\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{B}^1_{12}\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{B}^4_{14}\ddot{\mathbf{q}}_4 + \left(\mathbf{K}^1_{11} + \mathbf{K}^4_{11}\right)\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}^1_{12}\mathbf{q}_2 + \mathbf{K}^4_{14}\mathbf{q}_4 = 0,$$

$$\left(\mathbf{B}^1_{22} + \mathbf{B}^2_{22}\right)\ddot{\mathbf{q}}_2 + \mathbf{B}^1_{21}\ddot{\mathbf{q}}_1 + \mathbf{B}^2_{23}\ddot{\mathbf{q}}_3 + \left(\mathbf{K}^1_{22} + \mathbf{K}^2_{22}\right)\mathbf{q}_2 + \mathbf{K}^1_{21}\mathbf{q}_1 + \mathbf{K}^2_{23}\mathbf{q}_3 = \mathbf{P}_2 + \mathbf{Q}^2_p, \tag{476}$$

$$\left(\mathbf{B}_{33}^{2}+\mathbf{B}_{33}^{3}+\mathbf{B}_{3}\right)\ddot{\mathbf{q}}_{3}+\mathbf{B}_{32}^{2}\ddot{\mathbf{q}}_{2}+\mathbf{B}_{34}^{3}\ddot{\mathbf{q}}_{4}+\left(\mathbf{K}_{33}^{2}+\mathbf{K}_{33}^{3}\right)\mathbf{q}_{3}+\mathbf{K}_{32}^{2}\mathbf{q}_{2}+\mathbf{K}_{34}^{3}\mathbf{q}_{4}=0,$$
$$\left(\mathbf{B}_{44}^{3}+\mathbf{B}_{44}^{4}\right)\ddot{\mathbf{q}}_{4}+\mathbf{B}_{43}^{3}\ddot{\mathbf{q}}_{3}+\mathbf{B}_{41}^{4}\ddot{\mathbf{q}}_{1}+\left(\mathbf{K}_{44}^{3}+\mathbf{K}_{44}^{4}\right)\mathbf{q}_{4}+\mathbf{K}_{43}^{3}\mathbf{q}_{3}+\mathbf{K}_{41}^{4}\mathbf{q}_{1}=0.$$

Układ ten spełna więzy nakładane przez podpory i dla jego rozwiązania potrzebne są jedynie warunki początkowe.

Zauważmy, że macierze sztywności i macierze bezwładności mają strukturę, narzuconą przez warunki kontaktu elementów poprzez węzły. Powoduje to pasmową strukturę macierzy – elementy niezerowe są skoncentrowane w pobliżu przekątnych. Ma to istotne znaczenie przy konstrukcji algorytmów numerycznych dla dużej ilości niewiadomych. Literaturę, dotyczącą tego problemu można znaleźć w rozdziale Langera, który jest cytowany w literaturze poniżej.

Zakończymy prezentację metody elementów skończonych prostym przykładem określenia częstości drgań własnych. Rozpatrzmy układ przedstawiony na Rys. 29. Rozpatrzymy najprostsze przybliżenie przez dwa elementy identyczne z prętami ramy. Pomijamy wpływ rozciągania i ściskania. Mamy wtedy następujące związki dla ugięć elementów w lokalnych układach współrzędnych

$$\begin{aligned} \bar{v}^{1} &= N_{6}(\xi)\,\varphi_{2}(t), \quad \bar{v}^{2}=N_{3}(\xi)\,\varphi_{2}(t), \\ N_{6}(\xi) &= \left(-\xi^{2}+\xi^{3}\right)l, \quad N_{3}(\xi)=\left(\xi-2\xi^{2}+\xi^{3}\right)l. \end{aligned} \tag{477}$$

Siły i przemieszczenia brzegowe mają, odpowiednio, postać

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{b}^{1} &= \left(N_{12},T_{12},M_{12},N_{21},T_{21},M_{21}\right)^{T}, \quad \bar{Q}_{b}^{2}=\left(N_{23},T_{23},M_{23},N_{32},T_{32},M_{32}\right)^{T}, \\ \bar{q}^{1} &= \left(0,0,0,0,0,\varphi_{2}\right)^{T}, \quad \bar{q}^{2}=\left(0,0,\varphi_{2},0,0,0\right)^{T}. \end{aligned} \tag{478}$$

Wykorzystaliśmy tu już warunek zgodności kinematycznej w węźle 2.

Funkcje Lagrange'a dla elementów określamy ze związków

$$\begin{aligned} \bar{L}^{1} &= \frac{1}{2}\int_{0}^{l}\mu\left(\dot{\bar{v}}^{1}\right)^{2}dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{l}\frac{\left(\bar{M}^{1}\right)^{2}}{EI}dx+M_{21}\varphi_{2}, \\ \bar{L}^{2} &= \frac{1}{2}\int_{0}^{l}\mu\left(\dot{\bar{v}}^{2}\right)^{2}dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{l}\frac{\left(\bar{M}^{2}\right)^{2}}{EI}dx+M_{23}\varphi_{2}, \end{aligned} \tag{479}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}}^{1} &= N_{6}\dot{\varphi}_{2}, \quad \bar{M}_{1}=-EIN_{6}''\varphi_{2}=-EI\left(-2+6\xi\right)\frac{\varphi_{2}}{l}, \\ \dot{\bar{v}}^{2} &= N_{3}\dot{\varphi}_{2}, \quad \bar{M}_{1}=-EIN_{3}''\varphi_{2}=-EI\left(-4+6\xi\right)\frac{\varphi_{2}}{l}. \end{aligned} \tag{480}$$

Po wykonaniu prostego całkowania i podstawieniu do równań Lagrange'a

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial\mathbf{q}}=0, \tag{481}$$

otrzymujemy następujące lokalne równania ruchu dla elementów

$$\begin{aligned} \frac{\mu l^{3}}{105}\ddot{\varphi}_{2}+4\frac{EI}{l}\varphi_{2}-M_{21} &= 0, \\ \frac{\mu l^{3}}{105}\ddot{\varphi}_{2}+4\frac{EI}{l}\varphi_{2}-M_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{482}$$

Pozostaje przetransformować te równania do globalnego układu współrzędnych i wykorzystać warunek równowagi węzła. Ponieważ w równaniach występuje jedynie obrót transformacja ta jest trywialna, a warunek równowagi ma postać

$$M_{21} + M_{23} = 0. \tag{483}$$

Ostatecznie jedyne globalne równanie ruchu ma postać

$$\ddot{\varphi}_2 + 420\frac{EI}{\mu l^4}\varphi_2 = 0. \tag{484}$$

Wynikająca stąd częstość drgań własnych jest następująca

$$\omega = 20,4939\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}. \tag{485}$$

Obliczona poprzednio przy pomocy wzorów transformacyjnych pierwsza wartość częstości wynosiła $2,4674\sqrt{EI/\mu l^4}$. Otrzymany wynik odbiega więc bardzo znacznie od poprawnego. Oznacza to, że należy zagęścić siatkę elementów skończonych. Na przykład wybór dwóch dodatkowych węzłów w środku rozpiętości prętów ramy prowadzi do czterech elementów o jednakowej długości $l/2$, ilość niewiadomych wzrasta do pięciu, tym samym otrzymuje się pięć częstości drgań własnych, z których pierwsza prawie zgadza się z otrzymanym poprzednio wynikiem ścisłym. Takie zagęszczenie siatki wymaga również wprowadzenia globalnego układu współrzędnych, gdyż współrzędne przemieszczeń ulegają zmianie na skutek obrotu lokalnegoukładu współrzędnych w przeciwieństwie do niewiadomych obrotów.

6 Fale w liniowych ośrodkach sprężystych

Powrócimy teraz do problemu, o którym wspomnieliśmy na początku analizy dynamiki ośrodków ciągłych – propagacji fal w liniowych ośrodkach sprężystych. Analiza tych fal ma wielkie znaczenie praktyczne w konstrukcji metod nieniszczących badania materiałów, a zwłasza detekcji defektów, pęknięć, itp., badania takich własności gruntów, jak porowatość, miąższość warstw, akustyka budowli, działanie obciążeń sejsmicznych na budowle, itd. Punktem wyjścia są równania (218) i (219) teorii sprężystości, tzn.

równanie bilansu pędu

$$\rho\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \tag{486}$$

związki fizyczne (konstytutywne, prawo Hooke'a)

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}. \tag{487}$$

Równania te zapisaliśmy w kartezjańskim układzie współrzędnych $\{x_i\}_{i=1}^3$ z bazą wektorową $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^3$ i oznaczyliśmy: ρ jest gęstością masy na jednostkę objętości $\left[\mathrm{kg/m^3}\right]$, v – prędkością [m/s], σ_{ij} – tensorem naprężeń (Cauchy'ego) [Pa], e_{ij} – tensorem deformacji, [-], a λ i μ to stałe materiałowe Lamé [Pa]. Pomiędzy prędkością a tensorem deformacji zachodzi następujący związek *kinematycznej zgodności*

$$\frac{\partial e_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{488}$$

Rozwiązań tego układu w nieskończonej przestrzeni będziemy poszukiwali w *postaci fal monochromatycznych*

$$v_i = V_i e^{i(k_j x_j - \omega t)}, \quad e_{ij} = E_{ij} e^{i(k_j x_j - \omega t)}, \tag{489}$$

gdzie V_i, E_{ij} są stałymi amplitudami. Jak pamiętamy, zależność rozwiązania od punktu w przestrzeni x_j i od czasu t w postaci kombinacji $k_j x_j - \omega t = |\mathbf{k}| \left(n_j x_j - \frac{\omega}{|\mathbf{k}|} t \right)$, gdzie $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_i k_i}, n_j = \frac{k_j}{|\mathbf{k}|}$, została wyprowadzona przez d'Alamberta dla równania falowego. Interpretujemy ją fizycznie jako falę płaską, która propaguje się z prędkością $\frac{\omega}{|\mathbf{k}|}$ w kierunku wektora jednostkowego (kierunek propagacji) $\mathbf{n} = n_j \mathbf{e}_j$.

Podstawienie w (486)–(488) prowadzi do następujących zależności

$$\begin{aligned} \rho\omega V_i &= -\left(\lambda E_{kk} k_i + 2\mu E_{ij} k_j\right), \\ \omega E_{ij} &= -\frac{1}{2}\left(V_i k_j + V_j k_i\right). \end{aligned} \tag{490}$$

Eliminacja amplitudy E_{ij} daje ostatecznie warunek, którego spełnienie dopuszcza rozwiązania o postaci (489)

$$\left(\rho\omega^2 \delta_{ij} - \lambda k_i k_j - \mu \left(k_k k_k \delta_{ij} + k_i k_j\right)\right) V_j = 0. \tag{491}$$

Jest to problem na wartości własne. Rozwiązanie jest łatwiej skonstruować oddzielając problem w kierunku wektora propagacji $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k, k^2 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}$ i w kierunku prostopadłym do $\mathbf{n}$.

Pomnóżmy równanie (491) przez wektor $\mathbf{n}_\perp, \mathbf{n}_\perp \cdot \mathbf{n} = 0$. Otrzymujemy

$$\left(\rho\omega^2 - \mu k_k k_k\right) \left(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\perp\right) = 0. \tag{492}$$

Równanie to ma nietrywialne rozwiązania jeśli prędkość propagacji fali, tzw. prędkość fazowa, jest zadana związkiem

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad k = \sqrt{k_k k_k}. \tag{493}$$

A więc fale takie są niedyspersyjne – prędkość propagacji jest niezależna od częstotliwości, i nie występuje tłumienie, bo liczba falowa $k = |\mathbf{k}|$ jest rzeczywista. Ponieważ amplituda $\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_\perp$ jest prostopadła do kierunku propagacji $\mathbf{n}$ fale takie nazywamy *poprzecznymi* (amg. transversal) lub *ścinającymi.*

Pomnożenie równania (491) przez wektor $\mathbf{n}$ prowadzi do związku

$$\left(\rho\omega^2 - (\lambda + 2\mu) k_k k_k\right) (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = 0. \tag{494}$$

Tym samym prędkość fazowa jest dana związkiem

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{495}$$

Te fale są więc również niedyspersyjne i nietłumione. Ponieważ amplituda jest skierowana w kierunku propagacji nazywa się je falami *podłużnymi* (ang. longitudinal).

Prędkości fazowe fali poprzecznej i fali podłużnej w liniowych izotropowych ośrodkach sprężystych są niezależne od częstotliwości i wynoszą, odpowienio,

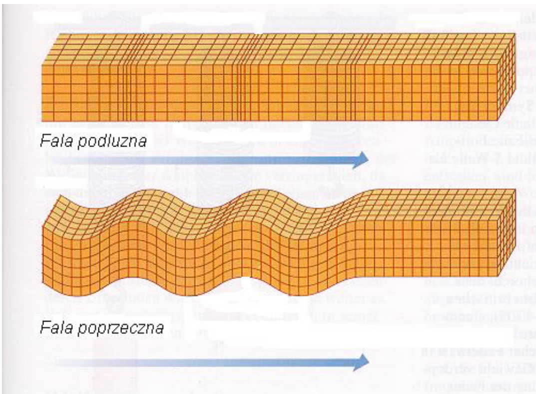
$$c_\perp = c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_\parallel = c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}. \tag{496}$$

Przykładowe wartości tych prędkości zestawiono w Tabeli.

Tabela: *orientacyjne wartości prędkości propagacji fal sprężystych dla wybranych materiałów*

materiał	ρ [kg/m^3]	c_L [m/s]	c_T [m/s]
aluminium walc.	2700	6420	3040
ołów walc	11400	2160	700
żelazo	7900	5950	3240
miedź walc.	8930	5010	2270
stal nierdz.	7900	5790	3100
szkło	3880	3980	2380
pleksiglas	1180	2680	1100
polietylen	900	1950	540

Na Rys. 38 przedstawiono schematycznie ruch materiału w postaci płaskiej fali podłużnej i poprzecznej.



Rys. 38: *Szkic ideowy fali podłużnej i poprzecznej*

Dowolne rozwiązania dynamiczne, również dla ośrodków skończonych ograniczonych brzegiem można przedstawić w postaci liniowej kombinacji fal monochromatycznych. Jest to tzw. przedstawienie Fourier'a (przedstawienie spektralne). Nie będziemy się tym problemem zajmowali i ograniczymy się do jednego zagadnienia, ważnego z punktu widzenia zastosowań w geotechnice – propagacji fal w ośrodkach półnieskończonych.

Konstrukcja rozwiązań dla ośrodków sprężystych z brzegiem jest łatwiejsza, jeśli wprowadzimy wektor przemieszczenia $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$, który spełnia relacje

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right). \tag{497}$$

Do wektora przemieszczeń można zastosować tzw. twierdzenie Helmholtza o dekompozycji wektora na część potencjalną i solenoidalną

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}, \quad \text{lub w układzie współrzędnych} \\ u_i &= \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_k}, \quad \varepsilon_{ijk} \text{ - symbol permutacyjny,} \end{aligned} \tag{498}$$

gdzie $\varphi, \boldsymbol{\psi}$ są tzw. potencjałami, odpowiednio, skalarnym i wektorowym. Wykorzystanie tego twierdzenia w równaniach teorii sprężystości, cytowanych powyżej, prowadzi do równań dla tych potencjałów

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_L^2 \nabla^2 \varphi, \quad \frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = c_T^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi}, \quad \text{tzn.} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= c_L^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \right), \quad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = c_T^2 \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_3^2} \right). \end{aligned} \tag{499}$$

Równania te są kompletnie równoważne wyjściowym równaniom teorii sprężystości.

Ośrodki półnieskończone, które chcemy przedyskutować, posiadają, oczywiście brzeg. Wybierzmy kartezjański układ współrzędnych z osią z prostopadłą do brzegu, osią x równoległą do brzegu i jednocześnie zgodną z zakładanym kierunkiem propagacji fali, oraz osią y, prostopadłą do x i z. Brzeg znajduje się w punktach $z = 0$. Przyjmujemy, że brzeg ten jest wolny od obciążeń. Oznacza to, że wektor naprężeń na tym brzegu jest równy zero. Jednocześnie zakładamy, że ośrodek pozostaje niezaburzony nieskończenie daleko od brzegu. Przy tych założeniach warunki brzegowe dla równań teorii sprężystości mają postać

$$\left.\sigma_{ij} n_j\right|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{n} = -\mathbf{e}_z \equiv -\mathbf{e}_3, \quad \left.\mathbf{u}\right|_{z\to\infty} = 0, \tag{500}$$

gdzie $\mathbf{u}$ jest wektorem przemieszczenia, $\mathbf{e}_z \equiv \mathbf{e}_3$ jest jednostkowym wektorem bazowym układu współrzędnych.

Dla części potencjalnej wektora przemieszczenia $\mathbf{u}_L = \operatorname{grad}\varphi$ (tzn. $\operatorname{rot}\mathbf{u}_L = 0$) i dla części solenoidalnej $\mathbf{u}_T = \operatorname{rot}\boldsymbol{\psi}$ (tzn. $\operatorname{div}\mathbf{u}_T = 0$) przyjmujemy następującą postać rozwiązań

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_L &= A_L e^{-\gamma z} e^{i(kx-\omega t)} \mathbf{e}_x + B_L e^{-\gamma z} e^{i(kx-\omega t)} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{u}_T &= A_T e^{-\beta z} e^{i(kx-\omega t)} \mathbf{e}_x + B_T e^{-\beta z} e^{i(kx-\omega t)} \mathbf{e}_z, \end{aligned} \tag{501}$$

gdzie A_L, A_T, B_L, B_T są stałymi amplitudami. Oznacza to, że oczekujemy propagacji zaburzenia w postaci fali w kierunku osi x i zanikania zaburzenia w kierunku osi z jeśli oba wykładniki γ, β są dodatnie. Jeśliby to nie mogło mieć miejsca, to rozwiązanie o powyższej postaci nie mogłoby istnieć. Wzory (501) oznaczają, że cząstki ośrodka poruszają się w płaszczyźnie (xz). To jest cechą charakterystyczną tzw. fal Rayleigh'a.

Wykorzystanie potencjałów $\varphi, \boldsymbol{\psi}$ i równań (499) prowadzi do następujących warunków

$$\frac{\gamma^2}{k^2} = 1 - \frac{c_R^2}{c_L^2}, \quad \frac{\beta^2}{k^2} = 1 - \frac{c_R^2}{c_T^2}, \quad c_R := \frac{\omega}{k}. \tag{502}$$

Jednocześnie wspomniane powyżej własności $\mathbf{u}_L$ ($\operatorname{rot}\mathbf{u}_L = 0$) i $\mathbf{u}_T$ ($\operatorname{div}\mathbf{u}_T = 0$) dają

$$\begin{aligned} B_L &= i\frac{\gamma}{k} A_L \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_L = \left(\mathbf{e}_x + i\frac{\gamma}{k}\mathbf{e}_z \right) A_L e^{-\gamma z} e^{i(kx-\omega t)}, \\ B_T &= i\frac{k}{\beta} A_T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}_T = \left(\mathbf{e}_x + i\frac{k}{\beta}\mathbf{e}_z \right) A_T e^{-\beta z} e^{i(kx-\omega t)}. \end{aligned} \tag{503}$$

W celu znalezienia stałych w rozwiązaniu musimy wykorzystać warunki brzegowe (500). Dla dodatnich wykładników β, γ redukują się one do postaci

$$\begin{aligned} \left(c_L^2 - 2c_T^2\right) \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x}{\partial x} + c_L^2 \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z}{\partial z} \bigg|_{z=0} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_x}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_z}{\partial x} \bigg|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \tag{504}$$

Podstawienie (503) w (504) prowadzi do jednorodnego układu równań algebraicznych

$$\begin{aligned} \left(2 - \frac{c_R^2}{c_T^2}\right) A_L + 2A_T &= 0, \\ 2\frac{\gamma\beta}{k^2} A_L + \left(2 - \frac{c_R^2}{c_T^2}\right) A_T &= 0. \end{aligned} \tag{505}$$

Zerowanie się wyznacznika tego układu, co jest warunkiem istnienia niezerowych rozwiązań, ma postać następującego związku dyspersyjnego Rayleigh'a

$$\mathcal{P}_R := \left(2 - \frac{c_R^2}{c_T^2}\right)^2 - 4\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_T^2}}\sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_L^2}} = 0. \tag{506}$$

Rozwiązania tego równania dają prędkość propagacji c_R skonstruowanej fali. Są one niezależne od częstotliwości ω, a więc fale Rayleigh'a nie posiadają dyspersji. Można pokazać, że istnieje tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste równania (506) i jest on nieco mniejsze od prędkości propagacji fal poprzecznych: $c_R < c_T < c_L$.

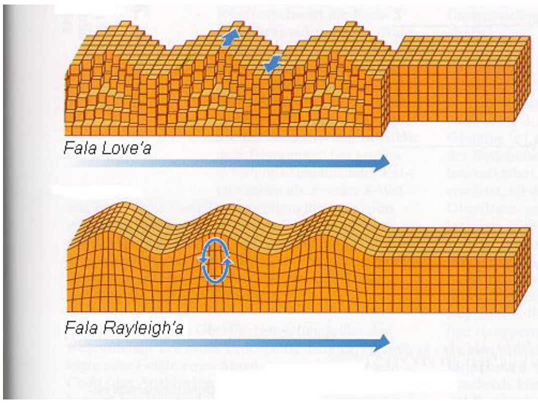


Fig. 39: *Szkic ideowy fal powierzchniowych Love'a i Rayleigh'a*

Na Rys. 39 przedstawiono ideowo ruch materiału przy propagacji dwóch typów fal powierzchniowych: fali Love'a, króra jest falą poprzeczną i propaguje się w warstwie sprężystej, spoczywającej na półnieskończonym ośrodku sprężystym i fali Rayleigh'a, którą omówiliśmy powyżej. Jak widać, ruch materiału jest w obu przypadkach ograniczony do warstwy brzegowej, której grubość jest rzędu długości fali. Fala Rayleigh'a jest szczególnie ważna przy opisie trzęsień ziemi.

7 Kilka uwag o stateczności układów prętowych

Na zakończenie tego cyklu wykładów przedstawimy krótko problem statycznej utraty stabilności przez układ prętowy. Problem ten był już omaviany przez Leonardo da Vinci, ale podstawy tzw. teorii wyboczenia prętów pryzmatycznych sformułował Leonard Euler.

Leonard Euler (1707 – 1783) wyprowadził wzór, określający siłę ściskającą pręt swobodnie podparty, przy której małe zaburzenie prostoliniowego stanu pręta prowadzi do stanu ugiętego. Wyprowadznie jest oparte na prostej teorii prętów, o której już mówiliśmy w tych wykładach. Rozpatrzmy pręt swobodnie podparty, obciążony jedynie siłą ściskającą S. Jeśli wygniemy pręt, to w dowolnym przekroju $0 \leq x \leq l$ działa moment zginający Sv, gdzie v jest ugięciem osi obojętnej pręta. Oznacza to, że równanie osi ugiętej ma postać

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -Sv. \tag{507}$$

Wygodnie jest je zapisać w postaci

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \alpha^2 v = 0, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \alpha^2 = \frac{Sl^2}{EI}. \tag{508}$$

W równaniu tym l jest długością belki. Rozwiązanie tego równania ma, oczywiście, postać

$$v = A \sin \alpha\xi + B \cos \alpha\xi. \tag{509}$$

Stałe wynikają z warunków brzegowych

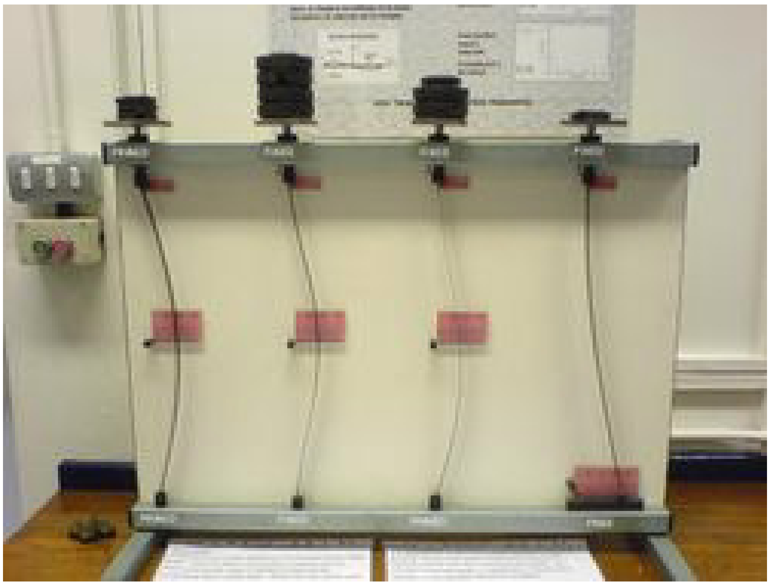
$$v\,(\xi = 0) = 0, \quad v\,(\xi = 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0, \quad \sin \alpha = 0. \tag{510}$$

Ostatni warunek wynika z założenia, że istnieje rozwiązanie z niezerowym ugięciem(tzn. $A \neq 0$). Oczywiste jest formalne podobieństwo tego problemu do problemu drgań własnych prętów.

Warunek (510) daje

$$\alpha = n\pi \quad \Rightarrow \quad S = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}, \quad n = 1, ... \tag{511}$$

Dla $n = 1$ (najmniejsze rozwiązanie) siła ta, $S = S_{kr}$, jest nazywana krytyczną siłą Eulera dla pręta swobodnie podpartego. Oczywiście, jej wartość zależy od sposobów podparcia i cztery podstawowe przypadki są pokazane na Rys. 40. Wielkość obciążenia w każdym przpadku obrazuje wielkość siły Eulera.



Rys. 40: *Model ilustrujący różne mody wyboczenia Eulera w zależności od warunków brzegowych. Z wyjątkiem warunków zamocowania wszystkie cztery pręty są identyczne.*

Jest jasne, że problem wyboczenia pojawia się jedynie dla siły ściskającej. W przeciwnym przypadku zmienia się znak w równaniu (508), rozwiązaniami są sinus i cosinus hiperboliczny, a te nie dają niezerowych rozwiązań jednorodnego problemu brzegowego, który rozważaliśmy powyżej.

Przedstawione powyżej rozważania dla pojedyńczego pręta mozna uogólnić na układy ramowe, obciązone siłami ściskającymi w węzłąch. W tym krótkim szkicu zajmiemy się tylko tym problemem. Wiele innych analogicznych zagadnień jest rozważane w książce W. Nowackiego, Mechanika Budowli, tom 2.

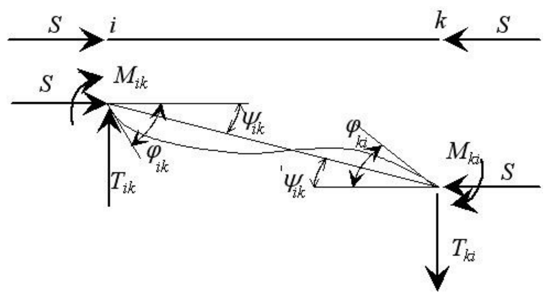
W celu konstrukcji równań dla sił krytycznych w ramach płaskich skonstruujemy wzory transformacyjne z uwzględnieniem siły ściskającej w pręcie. Na Rys. 41 przedstawiono oznaczenia i naszkicowano dwa stany pręta w przypadku, gdy siła S osiąga wartość krytyczną. Równanie jednorodne (508) trzeba teraz zmodyfikować, gdyż moment zginający ma następującą postać

$$\begin{aligned} M &= M_{ik} + T_{ik}x + S\left(v - w_i\right), \\ T &= \frac{dM}{dx} = T_{ik} + S\frac{dv}{dx}, \end{aligned} \tag{512a}$$

gdzie w_i jest ugięciem na lewej podporze. Biorąc pod uwagę warunki równowagi

$$T_{ik} = T_{ki}, \quad T_{ik}l + S\psi_{ik}l + M_{ik} + M_{ki} = 0, \tag{513}$$

gdzie, dla małych przemieszczeń, $\psi_{ik} = \left(w_k - w_i\right)/l$, w_k jest przemieszczeniem prawej podpory.



Rys. 41: *Oznaczenia do wzorów transformacyjnych dla wyboczenia*

Po wyeliminowaniu siły tnącej mamy ostatecznie

$$M = M_{ik}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - M_{ki}\frac{x}{l} + Sy, \quad y = v - w_i - \psi_{ik}x, \tag{514a}$$

gdzie y jest ugięciem belki, mierzonym w stosunku do obróconej osi pręta niezdeformowanego. Tym samym równanie ugięcia przyjmuje postać

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} + Sy + M_{ik}\left(1 - \frac{x}{l}\right) - M_{ki}\frac{x}{l} = 0. \tag{515}$$

Przyjmując warunki brzegowe

$$y\left(\xi = 0\right) = 0, \quad y\left(\xi = 1\right) = 0, \quad \xi = \frac{x}{l}, \tag{516}$$

otrzymujemy następujący wzór na ugięcie pręta

$$y = \frac{M_{ik}}{S}\left(\frac{\sin\alpha\left(1-\xi\right)}{\sin\alpha} - \left(1-\xi\right)\right) - \frac{M_{ki}}{S}\left(\frac{\sin\alpha\xi}{\sin\alpha} - \xi\right), \quad \alpha^2 = \frac{Sl^2}{EI}. \tag{517}$$

Pozostaje wykorzystać warunki na kąty obrotu na podporach

$$\varphi_i = \psi_{ik} + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\xi=0}, \quad \varphi_k = \psi_{ik} + \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\xi=1}. \tag{518}$$

Podstawienie (517) w (518) daje

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \frac{EI_{ik}}{l_{ik}}\left[c\left(\alpha\right)\varphi_i + s\left(\alpha\right)\varphi_k - r\left(\alpha\right)\frac{w_k - w_i}{l_{ik}}\right], \\ M_{ki} &= \frac{EI_{ik}}{l_{ik}}\left[s\left(\alpha\right)\varphi_i + c\left(\alpha\right)\varphi_k - r\left(\alpha\right)\frac{w_k - w_i}{l_{ik}}\right], \end{aligned} \tag{519}$$

gdzie

$$\begin{aligned} c\left(\alpha\right) &= \frac{\alpha\left(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha\right)}{2\left(1-\cos\alpha\right) - \alpha\sin\alpha}, \\ s\left(\alpha\right) &= \frac{\alpha\left(\alpha - \sin\alpha\right)}{2\left(1-\cos\alpha\right) - \alpha\sin\alpha}, \\ r\left(\alpha\right) &= c\left(\alpha\right) + s\left(\alpha\right) = \frac{\alpha^2\left(1-\cos\alpha\right)}{2\left(1-\cos\alpha\right) - \alpha\sin\alpha}. \end{aligned} \tag{520}$$

Oczywiście, EI_{ik} jest sztywnością pręta, łączącego węzły i i k, a l_{ik} – jego długością. Są to wzory transformacyjne dla momentów zginających pręta obustronnie zamocowanego. Dla siły tnącej otrzymujemy przy pomocy związku (513) następujące wzory

$$\begin{aligned} T_{ik} &= T_{ki} = \frac{EI_{ik}}{l_{ik}^2}\left[r(\alpha)(\varphi_i+\varphi_k)-2n(\alpha)\frac{w_k-w_i}{l_{ik}}\right], \\ n(\alpha) &= r(\alpha)-\frac{\alpha^2}{2}. \end{aligned} \tag{521}$$

W przypadku szczególnym $S=0$ (tzn. $\alpha=0$)

$$c(0)=4, \quad s(0)=2, \quad r(0)=6, \quad n(0)=6. \tag{522}$$

W przypadku rozciągania trzeba sinus zastąpić przez sinus hiperboliczny, cosinus – przez cosinus hiperboliczny, zamiast $1-\cos\alpha$ w mianowniku pojawia się $\cosh\alpha-1$, i wreszcie

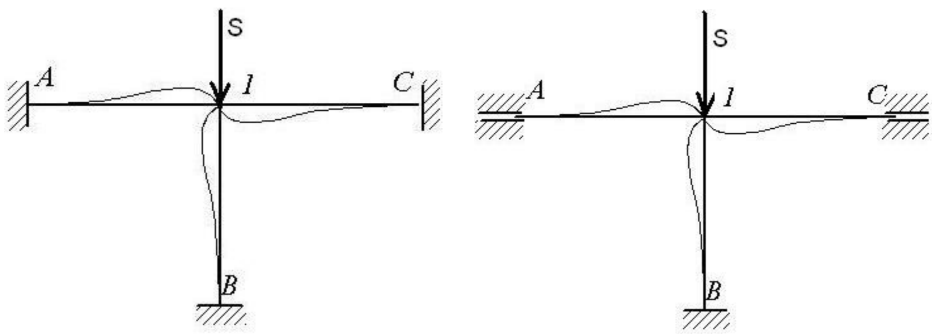
$$r(\alpha)=c(\alpha)+s(\alpha), \quad n(\alpha)=r(\alpha)+\frac{\alpha^2}{2}. \tag{523}$$

Nie będziemy wyprowadzali wzorów dla przypadku, gdy na jednym z końców jest przegub, gdyż, jak poprzednio, trzeba tam przyjąć moment zginający równy zero, a to daje związek do wyeliminowania kąta obrotu na podporze z przegubem.

Zastosowanie metody przemieszczeń prowadzi teraz do następujących związków. Rozpatrzmy najpierw ramę o węzłach nieprzesuwnych. Jako niewiadome przyjmujemy kąty obrotu węzłów. Z równań równowagi dla węzłów $\sum M=0$ otrzymamy równania kanoniczne, których liczba jest równa nieznanej liczbie kątów. Ponieważ jest to układ równań jednorodnych, więc jego wyznacznik musi znikać. To prowadzi do równania przestępnego, określającego siłę krytyczną.

Dla ram przesuwnych niewiadomymi są znów kąty obrotu węzłów i dodatkowo kąty obrotu prętów ψ_{ik}. Dochodzą jednak warunki równowagi sił w tej samej ilości, jak dodatkowych niewiadomych i problem jest analogiczny do problemu ram nieprzesuwnych.

Dla tych dwóch klas problemów rozpatrzymy na zakończenie dwa proste przykłady.



Rys. 42: *Przykład ramy nieprzesuwnej (po lewej) i przesuwnej (po prawej)*

Przyjmujemy, że wszystkie pręty ramy, przedstawionej na Rys. 42, są tej samej długości l i mają tą samą sztywność na zginanie EI. Problem na lewym rysunku ma jeden stopień swobody – obrót węzła 1, φ_1. Do jego wyznaczenia mamy do dyspozycji równanie równowagi momentów w tym węźle

$$M_{1A}+M_{1B}+M_{1C}=0. \tag{524}$$

Podstawienie wzorów transformacyjnych (519) prowadzi do równania

$$\begin{aligned} M_{1A} &= 4\frac{EI}{l}\varphi_1, \quad M_{1B} = \frac{EI}{l}c(\alpha)\varphi_1, \quad M_{1C} = 4\frac{EI}{l}\varphi_1, \quad \alpha^2 = \frac{Sl^2}{EI} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow & \quad d_n(\alpha) = 8 + c(\alpha) = 0. \end{aligned} \tag{525}$$

Otrzymaliśmy równanie transcendentne (przestępne), którego najmniejszy pierwiastek, wyznaczony numerycznie wynosi

$$\alpha = 5,66179 \quad \Rightarrow \quad S_{kr} = 32.05587\frac{EI}{l^2}. \tag{526}$$

W przypadku ramy przesuwnej mamy dwa stopnie swobody: kąt obrotu węzła φ_1 i jego poziome przesunięcie w_1, lub kąt obrotu pręta $1B$, ψ_{1B}. Równania dla tych dwóch niewiadomych wynikają z równowagi momentów i sił poziomych węzła 1. Mamy

$$\begin{aligned} M_{1A} + M_{1B} + M_{1C} &= 0, \\ T_{1B} &= 0. \end{aligned} \tag{527}$$

Wzory transformacyjne prowadzą do związków

$$\begin{aligned} M_{1A} &= 4\frac{EI}{l}\varphi_1, \quad M_{1B} = \frac{EI}{l}\left[c(\alpha)\varphi_1 + r(\alpha)\frac{w_1}{l}\right], \quad M_{1C} = 4\frac{EI}{l}\varphi_1, \\ T_{1B} &= \frac{EI}{l^2}\left[r(\alpha)\varphi_1 + 2n(\alpha)\frac{w_1}{l}\right]. \end{aligned} \tag{528}$$

Po podstawieniu w równaniach równowagi otrzymujemy

$$\begin{aligned} (8 + c(\alpha))\varphi_1 + r(\alpha)\frac{w_1}{l} &= 0, \\ r(\alpha)\varphi_1 + 2n(\alpha)\frac{w_1}{l} &= 0. \end{aligned}$$

Warunek istnienia nietrywialnych rozwiązań ma więc postać

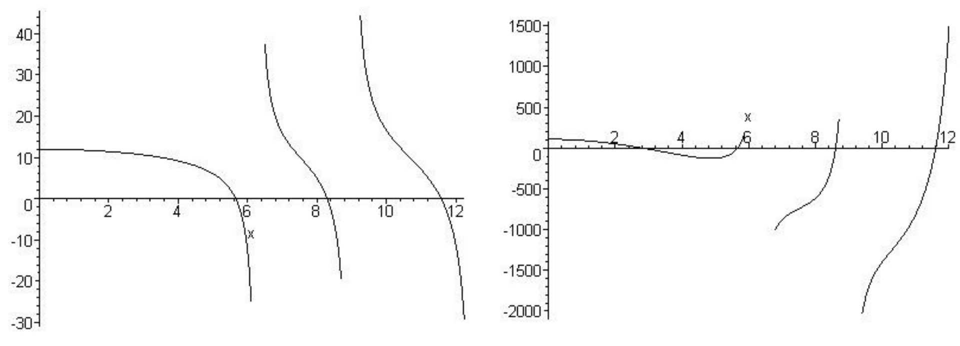
$$d_p(\alpha) = 2\left[8 + c(\alpha)\right]n(\alpha) - r^2(\alpha) = 0. \tag{529}$$

Jest to znów równanie przestępne, którego najmniejszy pierwiastek, obliczony numerycznie, ma wartość

$$\alpha = 2,80442 \quad \Rightarrow \quad S_{kr} = 7.8647\frac{EI}{l^2}. \tag{530}$$

Jak należało oczekiwać, siła krytyczna jest w tym przypadku znacznie mniejsza, niż w przypadku ramy nieprzesuwnej.

Przebieg wyznaczników charakterystycznych $d_n(\alpha)$ i $d_p(\alpha)$ jest przedstawiony na Rys. 43.



Rys. 43: *Przebieg wyznaczników $d_n(\alpha)$ (po lewej) i $d_p(\alpha)$ (po prawej) w funkcji α*

Na tym zakończymy to zwięzłe przedstawienie problemów stateczności układów prętowych.

8 Literatura

Roman Ciesielski, Andrzej Gomuliński, Zbigniew Kacprzyk, Janusz Kawecki, Jan Langer, Gustaw Rakowski, Zbigniew Reipert, Marek Witkowski; *Mechanika budowli. Ujęcie komputerowe*, tom II, Arkady, Warszawa, 1992.

Oswald Klingmüller, Michael Lawo, Georg Thierauf; *Stabtragwerke, Matrizenmethoden der Statik und Dynamik,* Teil 2: Dynamik, Vieweg&Sohn, Braunschweig/-Wiesbaden, 1983.

Lew Landau, E. Lifszic; *Mechanika*, PWN, Warszawa, 1965.

Jerzy Leyko; *Dynamika układów materialnych*, tom II, PWN, Warszawa, 1961.

Witold Nowacki; *Dynamika Budowli,* Arkady, Warszawa, 1961.

Witold Nowacki; *Mechanika Budowli,* tom I i II, PWN, Warszawa, 1960.

Witold Nowacki; *Teoria pełzania*, Arkady, Warszawa, 1963.

Zbigniew Osiński; Zbiór *zadań z teorii drgań*, PWN, Warszawa, 1989.

Gustaw Rakowski, Zbigniew Kacprzyk; *Metoda Elementów Skończonych w Mechanice Konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2005.

Romuald Świtka; *Dynamika Budowli, Notatki z wykładów*, Uniwersytet Zielonogórski, 1998.

S. Woroszył; *Przykłady i zadania z teorii drgań*, Część I i II, PWN, Warszawa, 1976/79.

Stefan Ziemba; *Analiza drgań*, PWN, Warszawa, 1957.

O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor; *The Finite Element Method,* Butterworth, Oxford, 2000.

Dynamika budowli

Program wykładów w semestrze letnim 2007

1. Wprowadzenie
2. Układ o jednym stopniu swobody

– drgania własne

– drgania wymuszone

– tłumienie

3. Układy o n stopniach swobody
   3.1. Metoda granulacji mas (nieobjektywna!)

– układ o dwóch stopniach swobody, macierz sztywności, macierz tłumienia, równania Lagrangeá II rodzaju

– drgania własne

– wektory własne

– współrzędne główne

– transformacja własna

– drgania wymuszone

– drgania wymuszone harmoniczne

   3.2. Układy prętowe

⋮

4. Układy z masami ciągłymi
   4.1. Drgania podłużne

– funkcje własne

– drgania własne

   4.2. Drgania poprzeczne

– funkcje własne

– drgania własne

   4.3. Metoda elementów skończonych
   4.4. Fale